

## CAPÍTULO 2

### 2 Revisión de la Literatura

#### 2.1 Introducción.

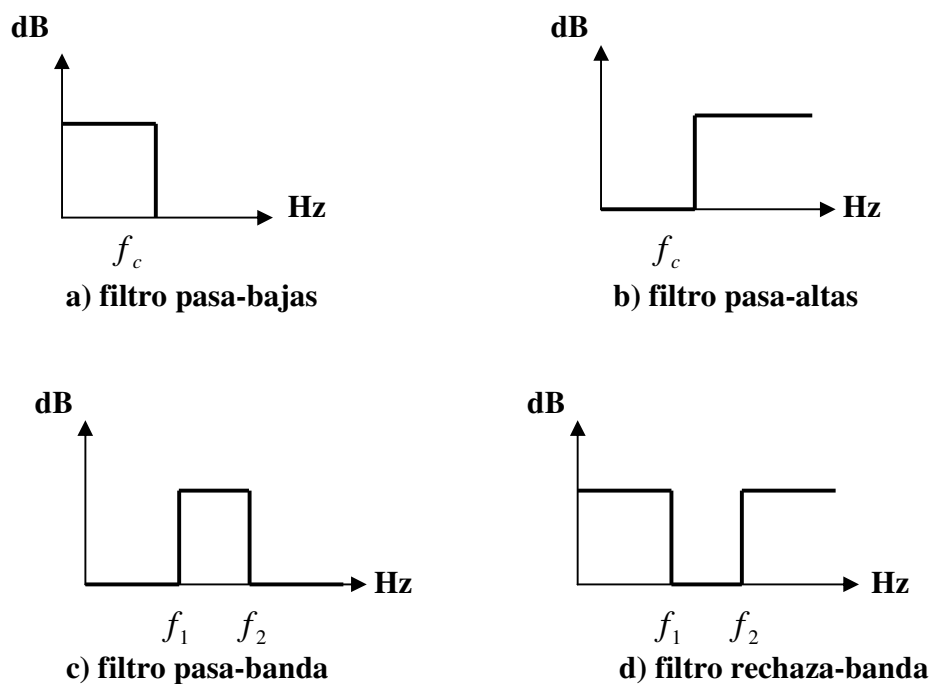
En este capítulo se presentan algunos de los fundamentos teóricos de lo que son filtros analógicos y sus aproximaciones, esto se debe a que existen diferentes tipos de filtrados. También se da un bosquejo de las diferentes aproximaciones de filtros, ya que la elección del filtro que se desea utilizar depende principalmente del tipo de respuesta de salida que se requiera, es decir, si se requiere de frecuencias bajas, altas u otra que se requiera. Por este motivo se presentan en este capítulo los filtros pasa-bajas, pasa-altas, pasa-banda y rechaza-banda, y estos pueden ser analógicos o digitales. Debido a que no existe un filtro que sea igual a los filtros ideales figura 2.1, se usan diferentes tipos de aproximaciones alguna de ellas pueden ser: aproximación Butterworth, aproximación Chebyshev, aproximación Elíptica, entre otras.

También en este capítulo se resalta una serie de ecuaciones que nos conduce a tener una mejor elección de un filtro elíptico.

#### 2.2 Tipos de filtros.

Los filtros son circuitos que permiten el paso o rechazo de una señal analógica ó digital dependiendo de su contenido espectral. Los filtros analógicos pueden ser implementados físicamente con componentes tales como: resistencias, inductores y

capacitores. Existen cuatro tipos fundamentales de filtros que son: filtros pasa-bajas, pasa-altas, pasa-banda y rechaza-banda. En la figura 2.1, se muestran las gráficas de los cuatro tipos de filtros, para el caso ideal.



**Fig.2.1 Tipos de filtros ideales**

### 2.3 Filtro pasa bajos

Es aquel que permite el paso de la señal de frecuencias bajas y el rechazo de las señales de frecuencias altas a partir de una frecuencia llamada frecuencia de corte (figura 2.1a.).

## **2.4 Filtro pasa altas**

Este filtro rechaza las señales de frecuencias bajas, pero permite el paso de la señal a frecuencias altas (figura 2.1.b.).

## **2.5 Filtro pasa banda**

Permite sólo el paso de la señal después de una frecuencia de corte hasta una segunda frecuencia de corte, como se puede observar en la figura 2.1.c.

## **2.6 Filtro rechaza banda**

Es el filtro que rechaza la señal a partir de la frecuencia de corte hasta una segunda frecuencia de corte y se observa en la figura 2.1.d.

Entre los distintos tipos de filtros analógicos: los pasivos y los activos.

### **2.6.1 Filtros pasivos**

Estos filtros se implementan sólo con dispositivos pasivos que pueden ser capacitores, inductores y resistencias. No necesitan de una fuente de alimentación para funcionar una de las propiedades mas importantes de estos circuitos es que tienen baja sensibilidad.

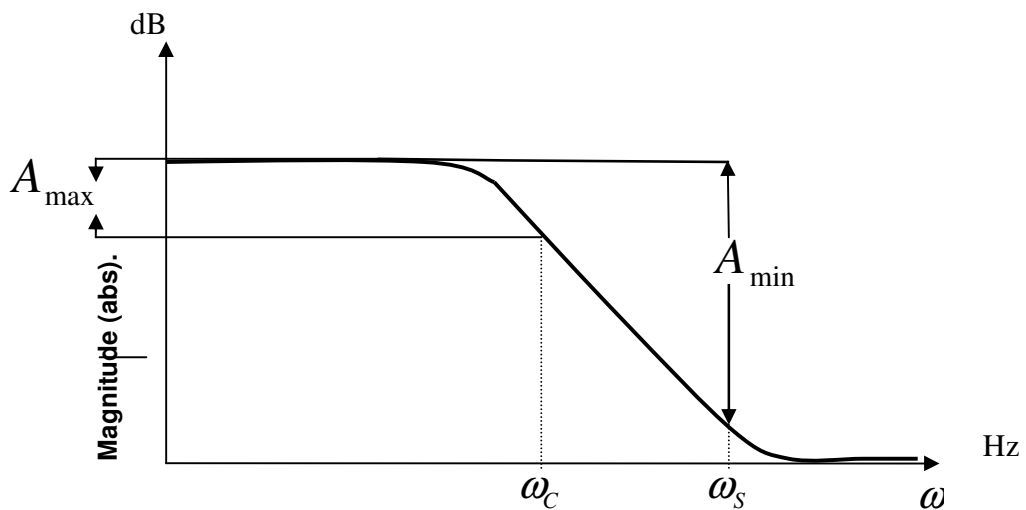
## 2.6.2 Filtros activos

Además de elementos pasivos, se emplean elementos activos y necesitan ser alimentados por una fuente de poder.

La figura 2.1, se puede aproximar con realizaciones analógicas o digitales y se puede mencionar alguna de ellas que son: Aproximaciones Butterworth, Chebyshev y elípticas.

## 2.7 Aproximación Butterworth

Tiene una característica plana para bajas frecuencias y para altas frecuencias cae a un valor pequeño, provocado por los ceros en el infinito.



**Fig. 2.2 Aproximación Butterworth n=6.**

## 2.8 Aproximación Chebyshev

La figura 2.3, corresponde a un ejemplo de un filtro pasa-bajos de orden seis con aproximación Chebyshev. Las características de este filtro son: rizados en la banda de paso, en la banda de rechazo no contiene rizados y los ceros se encuentran en el infinito, y esta aproximación si se promedia sus valores para un número de rizados mayor será más preciso, es decir entre mayor sea el orden del filtro mejor será éste.

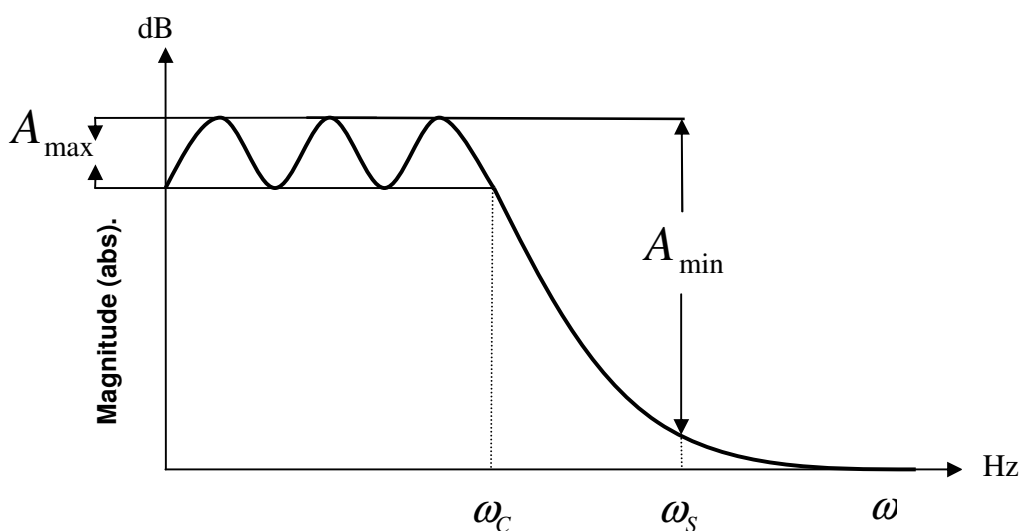
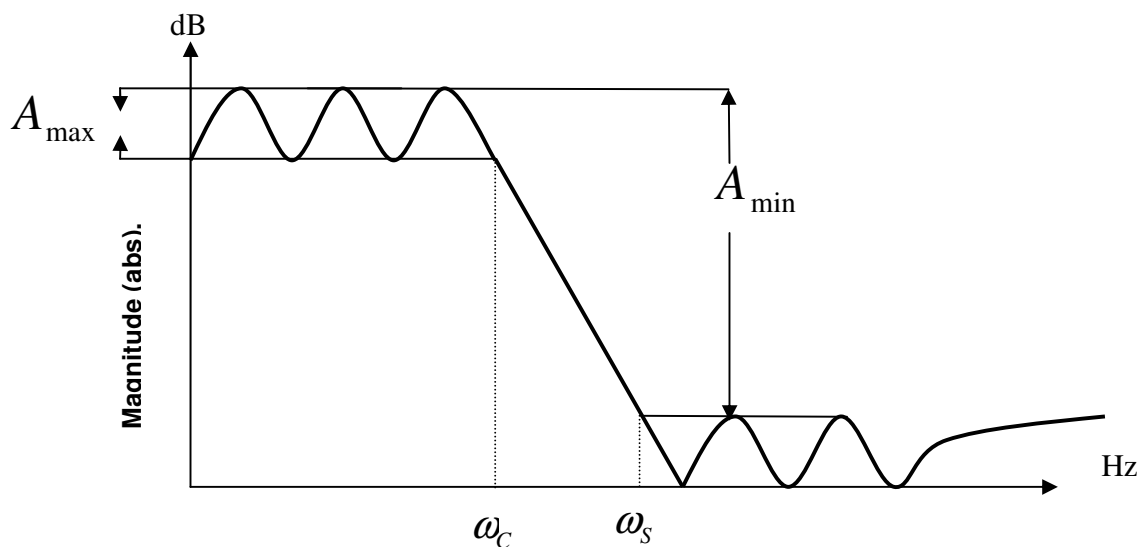


Fig. 2.3. Gráfica Chebyshev orden 6

## 2.9 Aproximación Elíptica



**Fig. 2.4 Gráfica de filtro elíptico Tipo A n=6.**

En la figura 2.4, se observa una gráfica de un filtro elíptico tipo A, que garantiza rizo constante tanto en la banda de paso como en la banda de rechazo, a comparación de los demás filtros. Este filtro cumple los requerimientos con un orden mínimo.

## 2.10 Aproximación Elíptica tipo A, B y C.

Los filtros elípticos contienen ceros, así como también polos en la función de transferencia. La característica de estos filtros elípticos es que tienen rizados en las bandas de paso y rechazo. Estos rizados producen menor orden en comparación de los filtros Butterworth y Chebyshev.

### 2.10.1 Filtro elíptico tipo A.

Este filtro se puede diseñar con Mfilters y es programado con las herramientas de Mfilters. Una de las ventajas que se pueden mencionar de este programa antes de modificarlo es el diseño de filtros tipo A, tanto par como impar, pero existen desventajas de Mfilters para el cálculo de filtros elípticos tipo A. Si se requiere de diseñar un filtro elíptico de orden par tipo A, nos genera la gráfica de la figura 2.5, que produce en la realización pasiva al menos un elemento. Para el caso impar el tipo A, no tiene ningún problema ya que este contiene un cero en el infinito y no produce componentes negativos en la realización pasiva, sus resistencias de entrada y salida son iguales, por esta razón contiene un máximo en la frecuencia cero como se observa en la figura 2.6.

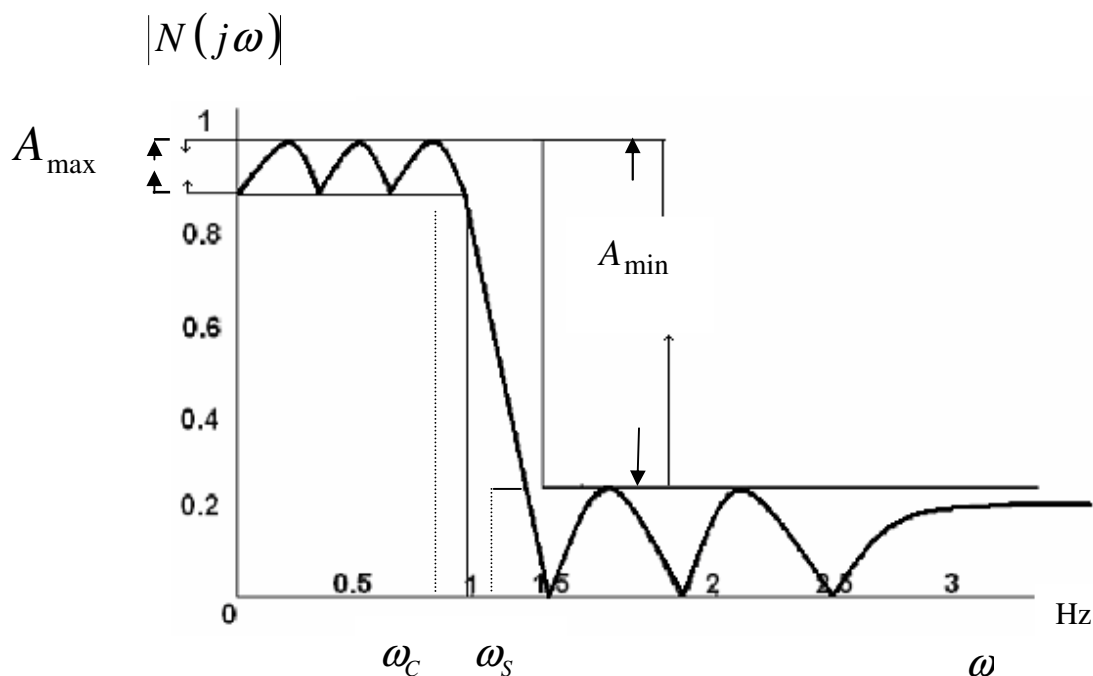
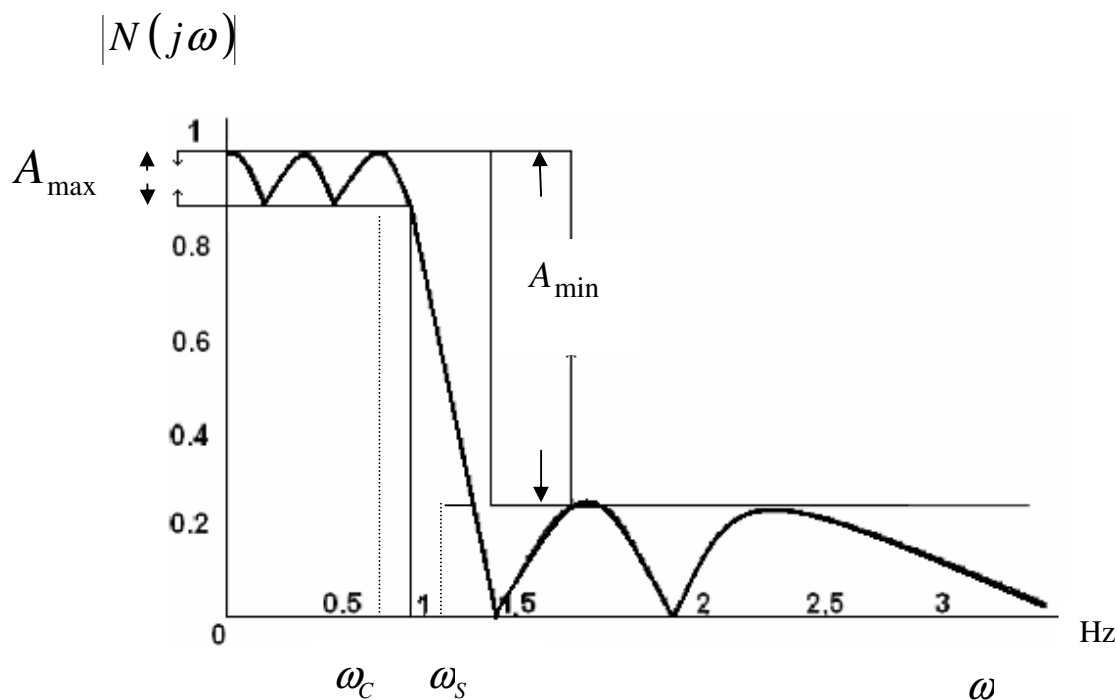


Fig. 2.5 Filtro elíptico tipo A n=6



**Fig. 2.6 Filtro elíptico tipo A para n=5**

Debido a esto se diseñó un programa en Matlab versión 7.0 para calcular filtros elípticos de tipo A, B y C, basado en el paper de Pierre Amstutz [4], El propósito de programarlo en Matlab es tener una herramienta más dentro de Mfilters ya que, Mfilters contiene sólo filtros elípticos de tipo A. Al anexar este programa se obtiene las opciones para diseñar filtros de tipo B y C y la realización pasiva para todos los tipos de filtros elípticos.

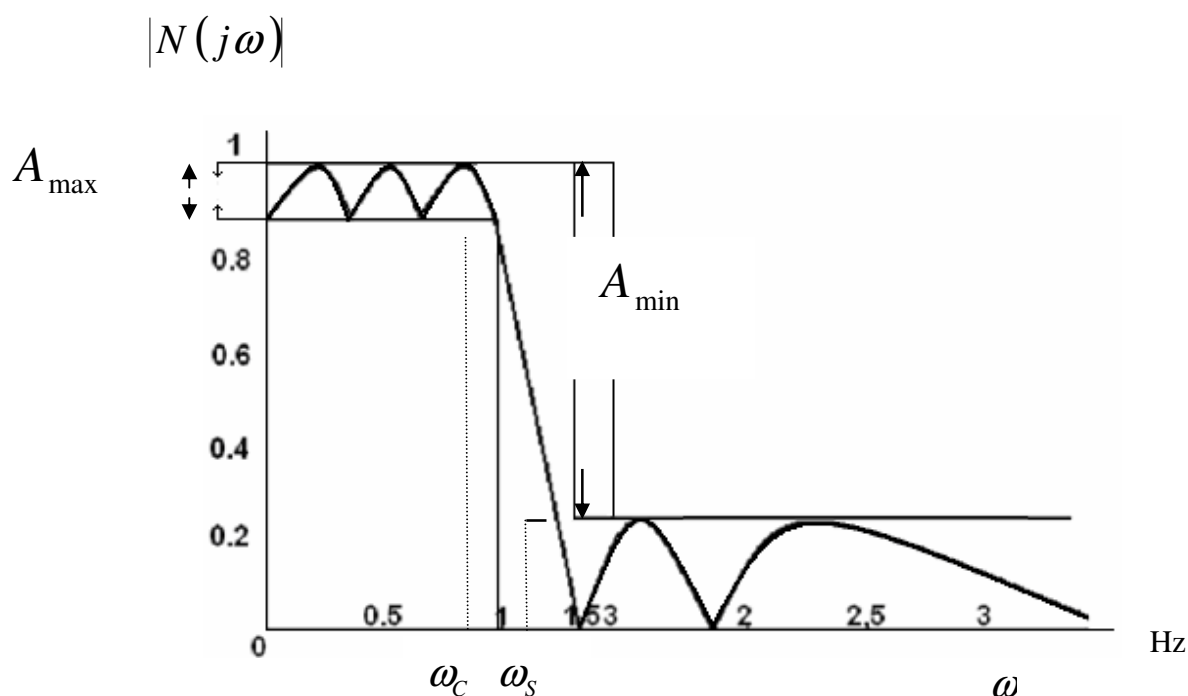
### 2.10.2 Filtro elíptico tipo B.

El propósito de anexar la aproximación de tipo B, es debido a que la aproximación de tipo A, al ser diseñado para orden par no contiene ceros en el infinito como en el caso



impar de tipo A. Esto nos conduce que en el circuito pasivo se obtiene en el cálculo al menos un elemento negativo en el circuito, obligando al uso de inductancias mutuas que son realizadas con transformadores. Evidentemente el uso de transformadores es indeseable ya que, son más costosos y voluminosos que los inductores; por tanto, este tipo de función de transferencia sólo es adecuado para realizaciones activas. Por esta razón se realiza la aproximación de tipo B, que nos genera un filtro con dos ceros en el infinito y esto produce un circuito pasivo con elementos positivos.

Para tipo B, también se obtienen resistencias diferentes de entrada y salida al igual que el tipo A, provocado por un mínimo en la gráfica a frecuencia cero, como se muestra en la figura 2.7. Otra característica que tienen en la banda de paso es el mismo número de máximos y mínimos para los dos tipos de funciones de transferencia tipo A y B orden par.



**Fig. 2.7 Filtro de orden 6 Tipo B.**

### 2.10.3 Filtro elíptico tipo C

Al igual que el tipo B, se implementa la aproximación de tipo C, con dos ceros que tienden al infinito para eliminar los elementos negativos al realizar el circuito pasivo. La diferencia que tiene la aproximación tipo C de la tipo B es que en esta última las resistencias de entrada y salida, son diferentes. Esto es debido a que la gráfica de magnitud tiene un valor máximo en la frecuencia cero. Esto nos conduce a obtener una gráfica de magnitud como si fuera de orden  $n-1$  debido a los máximos de la gráfica en la banda de paso. Esto se debe al corrimiento de la gráfica para obtener un valor máximo en frecuencia cero como se observa en la gráfica 2.8.

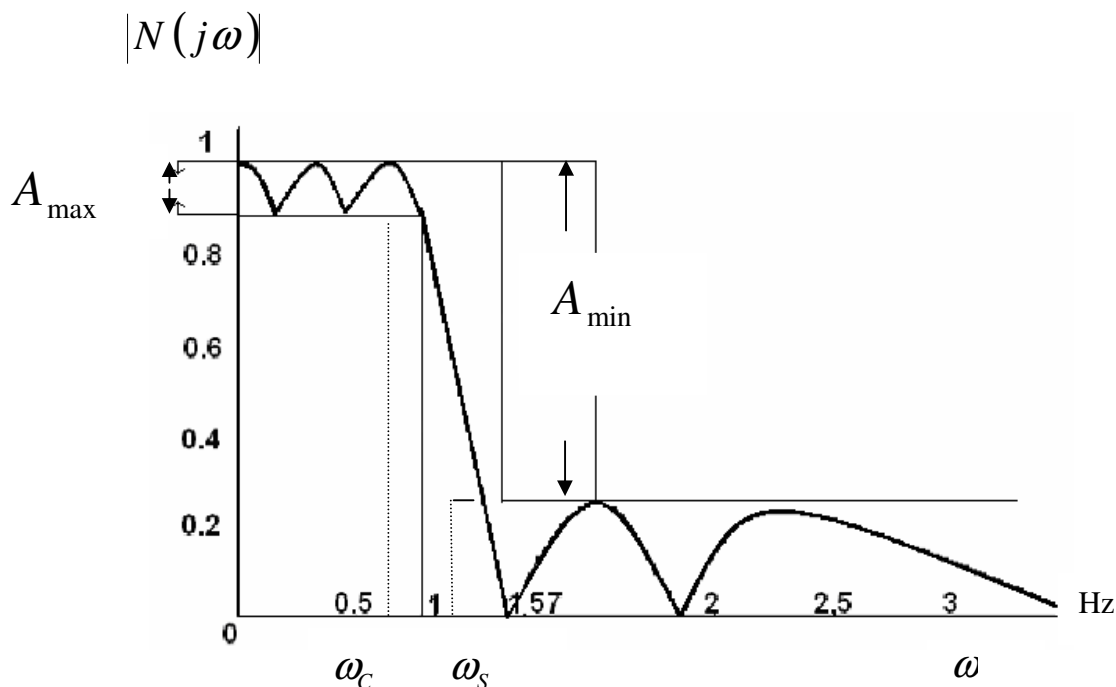
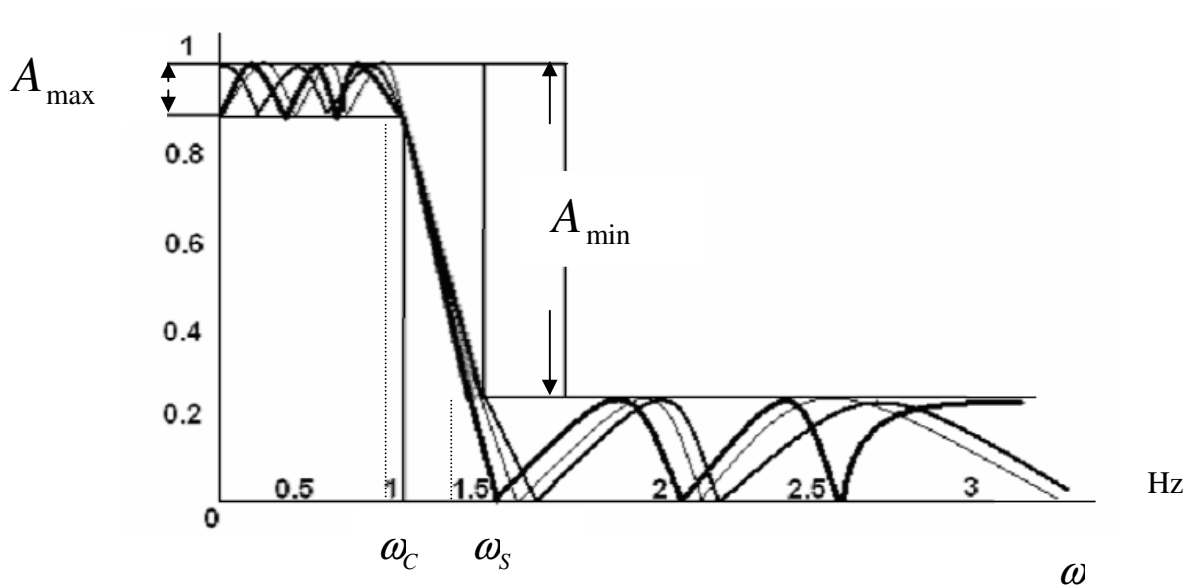


Fig. 2.8 Filtro tipo C de orden 6

La figura 2.9 contiene una comparación de los tres tipos de gráficas para caso par.

$$|N(j\omega)|$$



**Fig. 2.9 Filtros elípticos Tipo A, B y C para orden 6.**

Para la realización de estos tipos de filtros elípticos generalmente existen por lo menos cuatro métodos para obtener la función de transferencia de los filtros elípticos:

- Rumpelt
- Darlington
- Cauer
- Skwirzinski

### 2.10.4 Filtro elíptico con el método de Rumpelt

Este método es muy fácil de enseñar y también de aprender. Este método es gráfico y tiene la ventaja que se puede aproximar el filtro mas complicado. Con otras palabras, la aproximación que tiene más especificaciones en la banda de paso y la banda de rechazo.

La función de transferencia de un filtro elíptico se puede escribir como una división de dos polinomios y corresponde a la ecuación 2.1.

$$\phi(s) = c s^r \frac{(s^2 + a_1^2)(s^2 + a_2^2) \dots (s^2 + a_n^2)}{(s^2 + b_1^2)(s^2 + b_2^2) \dots (s^2 + b_m^2)} \quad \text{Ec. 2.1.}$$

Este polinomio se puede arreglar en la siguiente forma:

$$\phi(s) = c s^{r+n-m} \frac{a_1 a_2 \dots a_n \left( \frac{s}{a_1} + \frac{a_1}{s} \right) \left( \frac{s}{a_2} + \frac{a_2}{s} \right) \dots \left( \frac{s}{a_n} + \frac{a_n}{s} \right)}{b_1 b_2 \dots b_m \left( \frac{s}{b_1} + \frac{b_1}{s} \right) \left( \frac{s}{b_2} + \frac{b_2}{s} \right) \dots \left( \frac{s}{b_m} + \frac{b_m}{s} \right)}$$

Ec. 2.2.

Si en la ecuación 2.2 se sustituye  $s = j\omega$ , después del logaritmo natural de la parte derecha e izquierda se obtiene:

$$\ln |\phi(j\omega)| = \ln \left| c \frac{a_1 a_1 \dots a_n}{b_1 b_1 \dots b_{m1}} \right| + (r + n - m) \ln(\omega) + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\omega}{a_i} - \frac{a_i}{\omega} \right| - \sum_{i=1}^m \left| \frac{\omega}{b_i} - \frac{b_i}{\omega} \right|$$

Ec. 2.3.

Si se sustituye en la ecuación 2.3 las ecuaciones 2.4 y 2.5:

$$\left| c \frac{a_1 a_1 \dots a_n}{b_1 b_1 \dots b_{m1}} \right| = e^k \quad \text{Ec. 2.4.}$$

$$\omega = e^\gamma \quad a_i = e^{\gamma a_i} \quad b_i = e^{\gamma b_i} \quad \text{Ec. 2.5.}$$

Se obtiene la ecuación 2.6:

$$a_\phi = \ln |\phi(\omega)| = k + (r + n - m)\gamma + \sum_{i=1}^n \ln \left| e^{\gamma - \gamma_{a_i}} - e^{-(\gamma - \gamma_{a_i})} \right| - \sum_{i=1}^m \ln \left| e^{\gamma - \gamma_{b_i}} - e^{-(\gamma - \gamma_{b_i})} \right|$$

Ec. 2.6.

Que se puede escribir también en la forma siguiente:

$$a_\phi = \ln |\phi(\omega)| = k + (r + n - m)\gamma + \sum_{i=1}^n \ln \left( 2 \sinh \left| \gamma - \gamma_{a_i} \right| \right) - \sum_{i=1}^m \ln \left( 2 \sinh \left| \gamma - \gamma_{b_i} \right| \right)$$

Ec. 2.7.

La ecuación anterior se puede graficar en esta tesis se omite las graficas para este método ya que solo se pretende dar una idea de los métodos que existen.

### 2.10.5 Método de Darlington.

En este método Darlington eligió la función característica de la siguiente manera:

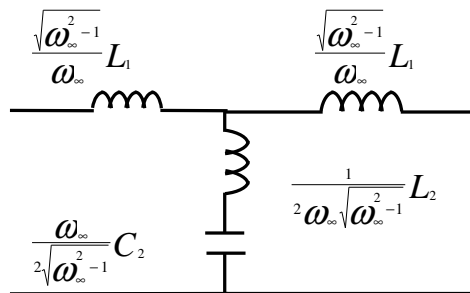
- Para filtros simétricos:

$$\phi(j\omega) = \sqrt{e^{0.23 a_{\max}} - 1} \cosh \left( g_{om} \right) \quad \text{Ec. 2.8.}$$

- Para los filtros asimétricos:
- 

$$\phi(j\omega) = \sqrt{e^{0.23 a_{\max}} - 1} \sinh \left( g_{om} \right) \quad \text{Ec. 2.9.}$$

De los filtros mk de Zobel figura 2.10, se obtiene:



**Fig. 2.10 Filtro mk Zobel.**

$$\cosh \left( \mathbf{g}_{om} \right) = \frac{m^2 \mathbf{s}^2 + \mathbf{s}^2 + 1}{\frac{\mathbf{s}^2}{\Omega_\infty^2} + 1} \quad \text{Ec. 2.10.}$$

Y para  $\sinh \left( \mathbf{g}_{om} \right)$

$$\sinh \left( \mathbf{g}_{om} \right) = \frac{2ms \sqrt{\mathbf{s}^2 + 1}}{\frac{\mathbf{s}^2}{\Omega_\infty^2} + 1} \quad \text{Ec. 2.11.}$$

Para calcular la función característica primeramente se calcula  $e^{q_{om}}$  y  $e^{-q_{om}}$

$$e^{q_{om}} = \cosh \left( \mathbf{g}_{om} \right) + \sinh \left( \mathbf{g}_{om} \right) = \frac{\left( ms + \sqrt{\mathbf{s}^2 + 1} \right)^2}{\frac{\mathbf{s}^2}{\Omega_\infty^2} + 1} \quad \text{Ec. 2.12.}$$

$$e^{-q_{om}} = \cosh \left( \mathbf{g}_{om} \right) - \sinh \left( \mathbf{g}_{om} \right) = \frac{\left( ms - \sqrt{\mathbf{s}^2 + 1} \right)^2}{\frac{\mathbf{s}^2}{\Omega_\infty^2} + 1} \quad \text{Ec. 2.13.}$$

Si los filtros de Zobel se conectan en cascada las constantes de propagación se suma

$\mathbf{g}_{o1} + \mathbf{g}_{o2} + \dots + \mathbf{g}_{om}$  y, después de un largo cálculo, se obtiene:





Para los filtros asimétricos se calcula  $\sinh(g_o)$ :

$$\sinh(g_o) = \frac{1}{2} \frac{\left(m_1 s + \sqrt{s^2 + 1}\right)^2 \dots \left(m_\sigma s + \sqrt{s^2 + 1}\right)^2 \left(s + \sqrt{s^2 + 1}\right)}{\left(\frac{s^2}{\Omega_{o1}^2} + 1\right) \left(\frac{s^2}{\Omega_{o2}^2} + 1\right) \dots \left(\frac{s^2}{\Omega_{o\sigma}^2} + 1\right)} +$$

$$+ \frac{\left(m_1 s - \sqrt{s^2 + 1}\right)^2 \dots \left(m_\sigma s - \sqrt{s^2 + 1}\right)^2 \left(s - \sqrt{s^2 + 1}\right)}{\left(\frac{s^2}{\Omega_{o1}^2} + 1\right) \left(\frac{s^2}{\Omega_{o2}^2} + 1\right) \dots \left(\frac{s^2}{\Omega_{o\sigma}^2} + 1\right)}$$

Ec. 2.17.

Y la función característica  $\phi(s)$  toma la forma:

$$\phi(j\omega) = \sqrt{e^{0.23 a \max} - 1} \sinh(g_o) = \sqrt{e^{0.23 a \max} - 1} s^{1+2\alpha_1 + 2b_2 s^2 + 2b_4 s^4 + \dots + 2b_{2\sigma} s^{2\sigma}}$$

$$\frac{1}{\left(\frac{s^2}{\Omega_{\infty 1}^2} + 1\right) \left(\frac{s^2}{\Omega_{\infty 2}^2} + 1\right) \dots \left(\frac{s^2}{\Omega_{\infty \sigma}^2} + 1\right)}$$

Ec. 2.18.

Los coeficientes de la función característica se calculan mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sigma = 1 & \quad b_2 = 1 + m_1^2 + 2m_1 \\ \sigma = 2 & \quad b_2 = a_2 + 4\alpha_1 + 2\alpha_1\alpha_{21} \\ \sigma = 3 & \quad b_2 = a_2 + 6\alpha_1 + 2\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_2 \\ & \quad b_4 = a_4 + 6\alpha_1 + 4\alpha_3 + 4\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_2\alpha_3 \\ & \quad b_6 = a_6 + 2\alpha_1 + 2\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_2\alpha_3 \end{aligned}$$

Ec. 2.19.

### 2.10.6 Filtro elíptico según Skwirzinski.

Los filtros elípticos según Skwirzinski parte de una constante  $K$  y esta definida por la ecuación siguiente:

$$K = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad \text{Ec. 2.20.}$$

Donde  $\omega_1$  es la frecuencia de corte y  $\omega_2$  es la frecuencia de rechazo. En el caso del filtro elíptico las frecuencias de la atenuación mínima y máxima están relacionadas mediante las ecuaciones:

$$\Omega_{os} = \frac{1}{\Omega_{\infty S}} \quad \Omega_{us} = \frac{1}{\Omega_{ns}} \quad \text{Ec. 2.21.}$$

El orden del filtro se puede calcular mediante la ecuación siguiente:

$$n \geq \frac{\text{Log}(16D)}{\text{Log}\left(\frac{1}{q}\right)} \quad \text{Ec. 2.22.}$$

Donde:

$$D = \frac{10^{0.1A_{\max}} - 1}{10^{0.1A_{\min}} - 1} \quad \text{Ec. 2.23.}$$

Y

$$q = q_o + 2 q_o^5 + 15 q_o^9 + 150 q_o^{13} \quad \text{Ec. 2.24.}$$

Donde

$$q_o = \frac{1 - \sqrt{K'}}{2(1 + \sqrt{K'})} \quad \text{Ec. 2.25.}$$

Los ceros reales de la función de transferencia son calculados por la siguiente ecuación:

$$\sigma_o = \left| \frac{2q^{\frac{1}{4}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \sinh((2m+1)A)}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cosh(2mA)} \right| \quad \text{Ec. 2.26.}$$

Donde

$$A = \frac{1}{2n} \operatorname{Ln} \frac{10^{0.05 A \max} + 1}{10^{0.1 A \max} - 1} \quad \text{Ec. 2.27.}$$

$$\omega = \sqrt{\left(1 + K \sigma_o^2\right) \left(1 + \frac{\sigma_o^2}{K}\right)} \quad \text{Ec. 2.28.}$$

$$\Omega_i = \frac{\left| 2q^{\frac{1}{4}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \sinh\left(\frac{(2m+1)\pi\mu}{n}\right) \right|}{\left| 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cosh\left(\frac{2m\pi\mu}{n}\right) \right|} \quad \text{Ec. 2.29.}$$

Donde:

$$\mu = \begin{cases} i & \text{Para n impar} \\ i - \frac{1}{2} & \text{Para n par} \end{cases} \quad \text{Ec. 2.30.}$$

$$V_i = \sqrt{\left(1 - K \Omega_i^2\right) \left(1 - \frac{\Omega_i^2}{K}\right)} \quad \text{Ec. 2.31.}$$

$$A_{oi} = \frac{1}{\Omega_i^2} \quad \text{Ec. 2.32.}$$

$$B_{oi} = \frac{(\sigma_o V_i)^2 + (\Omega_i \omega)^2}{(1 + \sigma_o^2 \Omega_i^2)^2} \quad \text{Ec. 2.33.}$$

$$B_{li} = \frac{2\sigma_o V_i}{(1 + \sigma_o^2 \Omega_i^2)^2} \quad \text{Ec. 2.34.}$$

$$H = \begin{cases} \sigma_o \prod_{i=1}^r \frac{B_{oi}}{A_{oi}} & \text{Para n impar} \\ 10^{-0.05 A_{MAX}} \prod_{i=1}^r \frac{B_{oi}}{A_{oi}} & \text{Para n par} \end{cases} \quad \text{Ec. 2.35.}$$

Después de calcular las ecuaciones anteriores se forma la función de transferencia de la siguiente manera:

$$H_n(s) = \frac{H_o}{D_o(s)} \prod_{i=1}^r \frac{s^2 + A_{oi}}{s^2 + B_{1i}s + B_{oi}} \quad \text{Ec. 2.36.}$$

$$r = \begin{cases} \frac{n-1}{2} & \text{Para } n \text{ impar} \\ \frac{n}{2} & \text{Para } n \text{ par} \end{cases} \quad \text{Ec. 2.37.}$$

### 2.10.7 Filtros elípticos con funciones elípticas.

Los filtros con este tipo de aproximación están definidos por la Ec. 2.38, donde el rizo se distribuye de manera equilibrada entre la banda de paso y la banda de rechazo, estas características están dadas por una función y esta dada dentro de la ecuación 2.38 por  $R_n(\omega)$ .

$$|N(j\omega)|^2 = \frac{H^2}{1 + \varepsilon^2 [R_n(\omega)]^2} \quad \text{Ec. 2.38.}$$

Donde

$$R_n(\omega) = B_1 \omega \prod_{i=1}^{\left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{\omega_{oi}^2 - \omega^2}{\omega_{zi}^2 - \omega^2} \quad \text{para } n \text{ impar} \quad \text{Ec. 2.39.}$$

$$R_n(\omega) = B_2 \omega \prod_{i=1}^{\left(\frac{N}{2}\right)} \frac{\omega_{oi}^2 - \omega^2}{\omega_{zi}^2 - \omega^2} \quad \text{para } n \text{ par} \quad \text{Ec. 2.40.}$$

Las funciones anteriores se llaman funciones de Chebyshev racional y satisfacen la propiedad de rizo igual en la banda de paso y rechazo para caso par e impar. Estos parámetros se determinan mediante el uso de funciones elípticas de Jacobi y por este motivo se le conoce a este tipo de filtros como filtros elípticos .

Con

$$\omega_{zi}^2 = \frac{\omega_x^2}{\omega_{oi}^2} \quad \text{Ec. 2.41.}$$

Donde

$\omega_x$  frecuencia de rechazo.

Y

$$sn(u) = \omega_{oi} \quad \text{Ec. 2.42.}$$

La ecuación 2.42 es llamada función elíptica de Jacobi [6].

Para el orden  $n$  de un filtro dado, los filtros de aproximación elíptica tienen una caída más brusca que los filtros de aproximación Butterworth y Chebyshev.

La aproximación elíptica es mucho más compleja que la aproximación Butterworth y Chebyshev. La ventaja de esta aproximación es que requiere de un orden menor para las mismas especificaciones de diseño que otros tipos de aproximación. Para encontrar el orden se emplea la ecuación 2.43.

$$N = \frac{K\left(\frac{1}{\omega_x}\right)K'\left(\frac{1}{L}\right)}{K'\left(\frac{1}{\omega_x}\right)K\left(\frac{1}{L}\right)} \quad \text{Ec. 2.43.}$$

Donde  $K$ ,  $K'$  están definidas por:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2(x))^{-\frac{1}{2}} dx \quad \text{Ec.2.44.}$$

$$K'(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - (1 - k^2) \sin^2(x))^{-\frac{1}{2}} dx \quad \text{Ec.2.45.}$$

Y son las llamadas integrales elípticas de primer tipo.

Para el cálculo de polos y ceros una vez calculado el orden del filtro elíptico se calcula la ecuación 2.46 ó ecuación 2.47 según sea el caso.

$$U = \frac{(2I - 1)K \left( \frac{1}{\omega_x} \right)}{N} \quad \text{Para } N \text{ par donde } l=1,2,\dots, N/2. \quad \text{Ec.2.46.}$$

$$U = \frac{(2I)K \left( \frac{1}{\omega_x} \right)}{N} \quad \text{Para } N \text{ impar donde } l=1,2,\dots, (N-1)/2. \quad \text{Ec.2.47.}$$

Con ayuda de las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$R_n(\omega) = B_i \omega \prod_{l=1}^{\left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{\omega^2 - sn^2(U)}{\omega^2 - \omega_x / sn^2(U)} \quad \text{Para } N \text{ impar.} \quad \text{Ec.2.48.}$$

$$R_n(\omega) = B_i \omega \prod_{l=1}^{\left(\frac{N}{2}\right)} \frac{\omega^2 - sn^2(U)}{\omega^2 - \omega_x / sn^2(U)} \quad \text{Para } N \text{ par} \quad \text{Ec.2.49.}$$

Donde  $sn(u)$  son las funciones elípticas de Jacobi de 1ª clase. Para evaluar la sumamos:



$$sn(u) = 2q^{\frac{1}{4}} \left[ \frac{1}{\omega_x} \right]^{-\frac{1}{2}} \sin(x) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2q^{2n} \cos(2x) + q^{4n}}{1 - 2q^{2n-1} \cos(2x) + q^{4n-2}} \quad \text{Ec.2.50.}$$

Donde

$$q = \varepsilon^p \quad \text{Ec. 2.51.}$$

Y

$$p = -\pi \frac{K \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{1}{\omega_x} \right)^2} \right]}{K \left[ \frac{1}{\omega_x} \right]} \quad \text{Ec.2.52.}$$

$$U = \frac{2xK \left[ \frac{1}{\omega_x} \right]}{\pi} \quad \text{Ec. 2.53.}$$

Una vez que se tienen los polos y ceros se forma la función de transferencia del filtro de tipo A, a partir de este tipo se hace la conversión a filtros de tipo B ó tipo C con las siguientes ecuaciones:

$$\omega'^2 = \left( \omega_c^2 - \omega_b^2 \right) \frac{\omega^2}{\omega_c^2 - \omega_b^2} \quad \text{Para tipo B} \quad \text{Ec.2.54.}$$

$$\omega'^2 = \left( \omega_c'^2 - \omega_o'^2 \right) \frac{1}{1 - \omega_o'^2} \quad \text{Para tipo C} \quad \text{Ec.2.55.}$$

Y se obtienen las funciones de transferencia de tipo A, tipo B, tipo C.

Con los polos y ceros se obtiene:

$$G(s) = \frac{P(s)}{E(s)} \quad \text{Ec.2.56.}$$

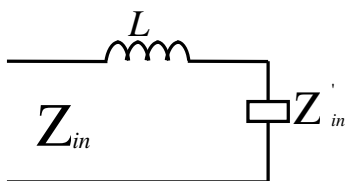
Para aplicar la ecuación de Feldtkeller []

$$M(s)M(-s) = E(s)E(-s) - \frac{4R_1R_2}{(R_1 + R_2)^2} P(s)P(-s) \quad \text{Ec.2.57.}$$

La impedancia de donde se obtienen los elementos del circuito pasivo es:

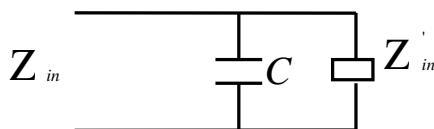
$$Z_{in} = [R_1 E(s) + R_1 M(s) / (E(s) - M(s))] \quad \text{Ec. 2.58.}$$

El primer inductor, capacitor y segundo inductor se obtienen con las ecuaciones 2.59-2.61.



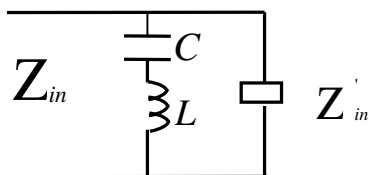
**Fig. 2.11 Inductor serie.**

$$L = \frac{Z_{in}}{s} \Big|_{s = \infty} \quad Z'_{in} = Z_{in} - sL \quad \text{Ec. 2.59.}$$



**Fig.2.12 Capacitor serie**

$$C = \frac{1/Z_{in}}{s} \Big|_{s = \infty} \quad \frac{1}{Z'_{in}} = \frac{1}{Z_{in}} - sc \quad \text{Ec 2.60.}$$



**Fig.2.13 Inductor con capacitor en serie.**

$$L = \frac{sZ_{in}}{s^2 + \omega_Z^2} \Big|_{s^2 = -\omega_Z^2}$$

$$\frac{1}{Z_{in}''} = \frac{1}{Z_{in}'} - \frac{s/L}{s^2 + \omega_Z^2}$$

$$C = \frac{1}{L \omega_Z^2}$$

Ec. 2.61.