

CAPITULO 4. FASE DE PREPROCESAMIENTO

La etapa de preprocesamiento consiste en crear las estructuras jerárquicas de cada uno de los objetos de los que se desea saber si existe colisión entre ellos, mismas estructuras que posteriormente se utilizaran en la etapa de verificación. Esta fase generó tres problemas a resolver, los cuales describiremos a continuación.

4.1 PROBLEMAS A RESOLVER

1. Encontrar un método que calcule la esfera de menor radio para cubrir un triángulo en 3D.
2. Dadas dos esferas cualesquiera, seleccionar un método que encuentre la esfera de menor radio capaz de cubrir a estas dos.
3. Encontrar el orden en el que se deberán colocar los triángulos en el nivel de hojas en la estructura jerárquica.

Esfera de menor radio

Este fue el primer problema al cual nos enfrentamos. Al recibir la malla de triángulos con la cual se encuentra modelado el objeto, esta no presenta todos sus triángulos de la misma forma, sino varían en forma y tamaño.

Propusimos tres métodos a los cuales les llamamos *Baricentro*, *Máximos y mínimos*, y *Lado Mayor*. Debido a la forma de los triángulos ninguno de los métodos propuestos genera las esferas de menor radio para todos los triángulos que modelan el objeto.

Cada uno de ellos se explica en la sección 4.2.

Esfera de menor radio para cubrir dos esferas

Este fue el segundo problema a resolver. Se requería de un método que encontrara la esfera de menor radio capaz de envolver a las dos esferas dadas.

De la misma manera para este problema propusimos tres métodos a los cuales les llamamos *Radio mayor*, *Máximos y mínimos*, *Vectorización*. Al igual que en el problema anterior, la decisión se tomo después de probar los métodos con varias muestras de pares de esferas. Cada uno de estos métodos se describe en la sección 4.3.

Como colocar los triángulos en el nivel de hojas de la estructura jerárquica

Al recibir las mallas que modelan los objetos, nada nos garantiza que los triángulos traigan un orden determinado en la lista.

Uno de las características de los algoritmos que utilizan estructuras jerárquicas es ir quitando aquellas partes del objeto donde no existe probabilidad de intersección, conservando solamente las áreas de mayor posibilidad. Por lo que colocar adecuada a los triángulos en el nivel de hojas ayudara a que esta técnica nos permita llegar a la verificación de nivel de hojas solo en aquellos casos en donde sea necesario.

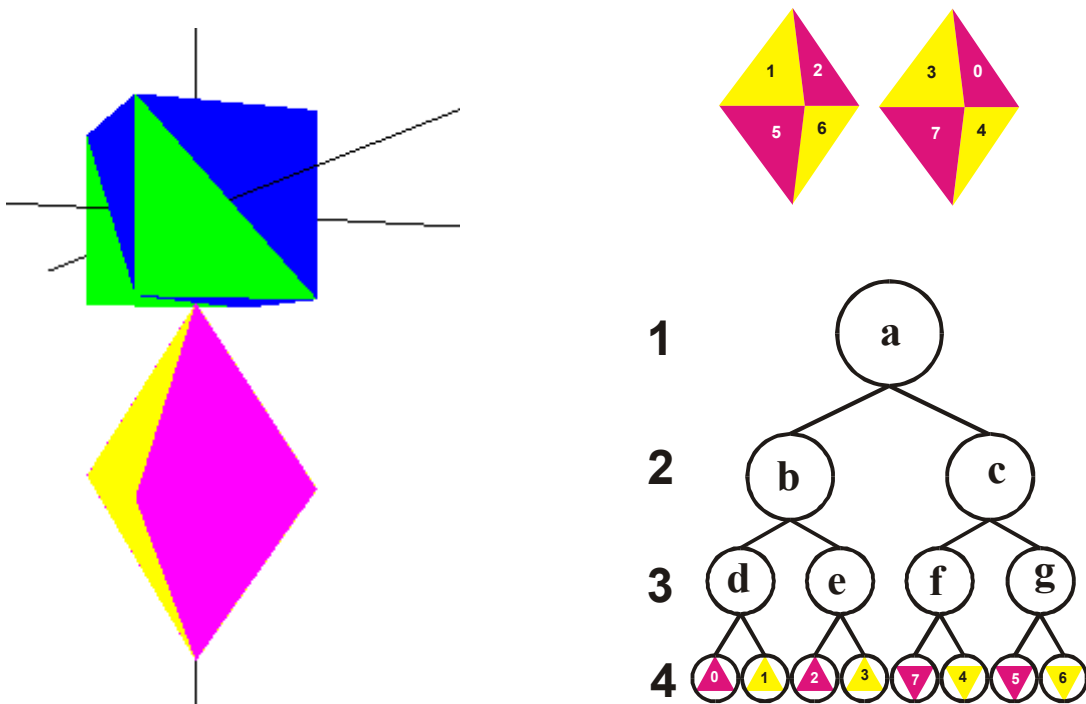


Figura 4.1. Estructura jerárquica del tetraedro con un ordenamiento en el nivel de hojas

En la figura 4.1, observamos que el tetraedro esta presentando una posible colisión con el cubo en la parte superior, si la estructura jerárquica en su último nivel se encuentra ordenada como se muestra a la derecha, el método podaría toda la rama c, ya que la esfera c cubre a los todos los triángulos de la parte

inferior del tetraedro, los cuales no presentan intersección alguna con los triángulos que pertenecen al cubo.

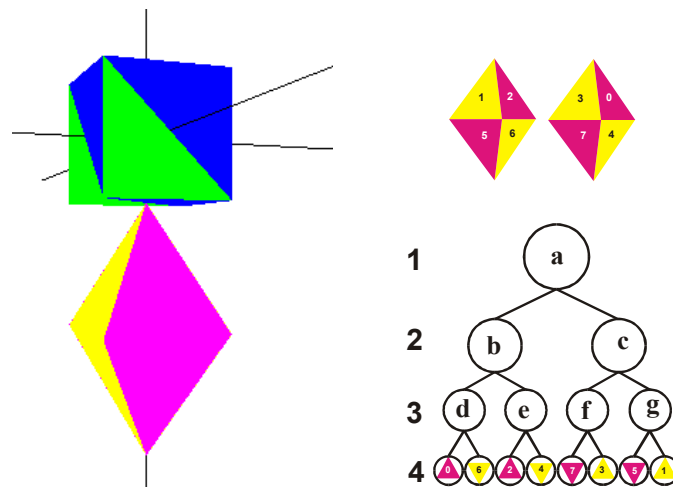


Figura 4.2. Estructura del tetraedro sin ordenamiento en el nivel de hojas

Por otro lado, si no hiciéramos ningún ordenamiento sobre los triángulos que recibimos de la malla, el método no podría podar de la misma manera ya que las esferas *b* y *c* tiene triángulos que pertenecen a la parte superior e inferior del tetraedro. Esto puede observarse en la figura 4.2. El algoritmo intentaría con el siguiente nivel con las esferas *d*, *e*, *f* y *g*, pero estas también cubren triángulos de ambas partes. El algoritmo tendría que ir hasta el último nivel donde se encuentran las esferas que cubren a los triángulos de la malla y tendrá que verificar todos contra todos, lo que provocara que el tiempo de respuesta sea mayor.

Este ordenamiento se explica en la sección 4.4.2

A continuación describiremos cada uno de los métodos propuestos y seleccionados para resolver los problemas descritos anteriormente.

4.2 ESFERA DE MENOR RADIO

El primer problema de la etapa de preprocesamiento fue encontrar el método que nos calculara la esfera de menor radio para cubrir un triángulo.

Los métodos sobre los que se experimento fueron:

- Baricentro
- Máximos y mínimos
- Lado Mayor

BARICENTRO

El *baricentro* es el punto de corte de las medianas. Las medianas son las rectas que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto.

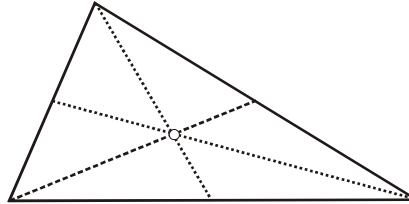


figura 9. Baricentro de un triángulo

Sea un triángulo cuyos vértices son:

$$V1(x1, y1) \quad V2(x2, y2) \quad V3(x3, y3)$$

El Baricentro del triángulo se obtiene como el promedio de las coordenadas en X y el promedio de las coordenadas en Y

$$B\left(\frac{x1 + x2 + x3}{3}, \frac{y1 + y2 + y3}{3}\right)$$

Obtenido el baricentro del triángulo, se determina cual es la distancia mayor entre el baricentro y los tres vértices y esa distancia se toma como el radio de la esfera.

$$Radio = Dis_mayor(d(B, V1), d(B, V2), d(B, V3))$$

Las pruebas se realizaron en 2D y posteriormente en 3D, un ejemplo en 2D de ello se muestra en la figura 4.3.

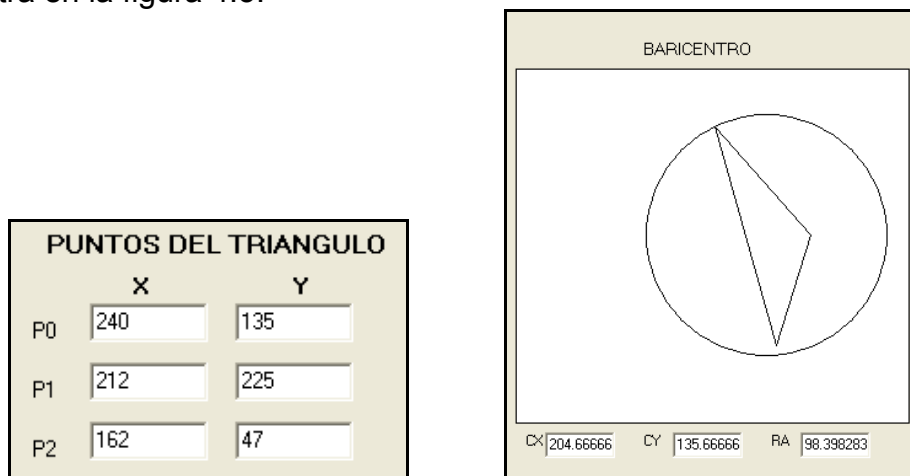


figura 4.3. Esfera generada por Baricentro en 2D

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

El método de *máximo y mínimos* consiste en obtener la caja envolvente del triángulo para calcular el punto central de la misma.

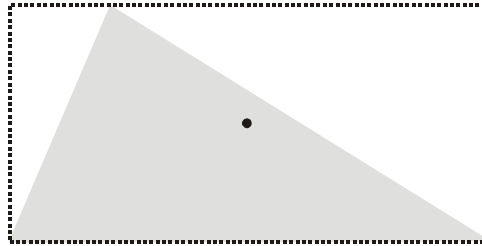


figura 4.4. Caja envolvente de un triángulo

El punto central de la caja envolvente se calcula como:

$$cx = \frac{\max x + \min x}{2} \quad cy = \frac{\max y + \min y}{2}$$

$$pc = (cx, cy)$$

Obtenido el centro de la caja (pc), se obtiene el radio para la esfera, determinando la distancia a cualquiera de los vértices de la caja.

$$vc = (\min x, \min y)$$

$$Radio = dis(pc, vc)$$

De igual forma, las pruebas se realizaron en 2D y posteriormente en 3D, un ejemplo de ello en 2D se muestra en la figura 4.5.

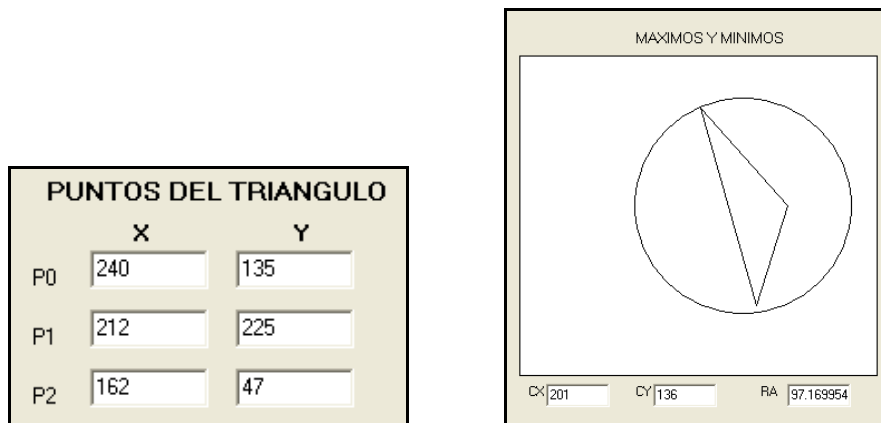


figura 4.5. Esfera generada por Max. y Mín. en 2D

LADO MAYOR

El método del *lado mayor* se basa en la longitud de los lados del triángulo. Primero se determina cual es el lado de la longitud mayor.

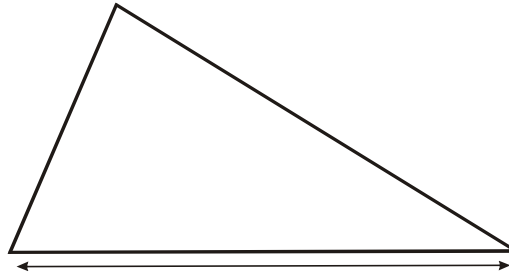


figura 4.6 Lado mayor de un triángulo

$$lm = long_mayor(l1, l2, l3)$$

Determinado el lado mayor (lm) del triángulo, se obtiene el centro de la esfera (ce) que es el punto medio de este lado.

$$ce = \left(\frac{x1 + x2}{2}, \frac{y1 + y2}{2} \right)$$

El radio de la esfera se calcula, obteniendo la distancia de ce al cualquiera de los vértices de los que forma parte este lado, o bien como la mitad de la longitud del lado.

$$radio1 = lm/2$$

Este radio se tomará como válido si la distancia del centro de la esfera al otro vértice que no forma parte del lado mayor es menor, en caso contrario, el radio será la distancia del centro al vértice (v) que no pertenece al lado de mayor.

$$radio2 = d(ce, v)$$

$$Radio = Dis_mayor(radio1, radio2)$$

Las pruebas realizadas para estos métodos fueron en 2D y posteriormente en 3D.

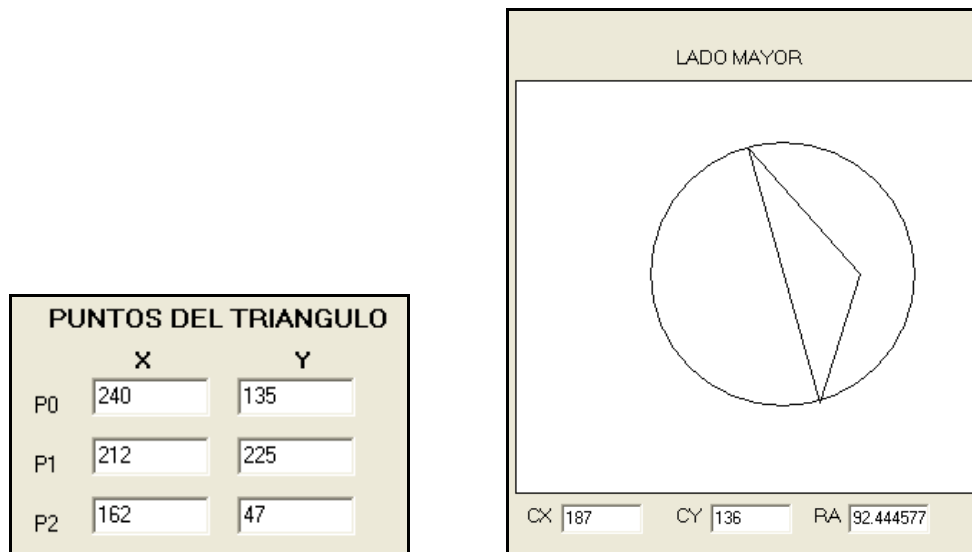


figura 4.7. Esfera generada por el lado mayor en 2D

A continuación se muestran dos ejemplos en 3D sobre los tres métodos anteriores, se genera un triángulo aleatoriamente y se le aplican los tres métodos.

En este primer ejemplo se muestra en 3D y en forma conjunta los tres métodos que calculan la esfera que cubre al triángulo, donde el color de la esfera indica cual es el método con el cual fue generada, el rojo corresponde a *Baricentro*, el verde *Lado Mayor* y el azul a *Max y Min*.

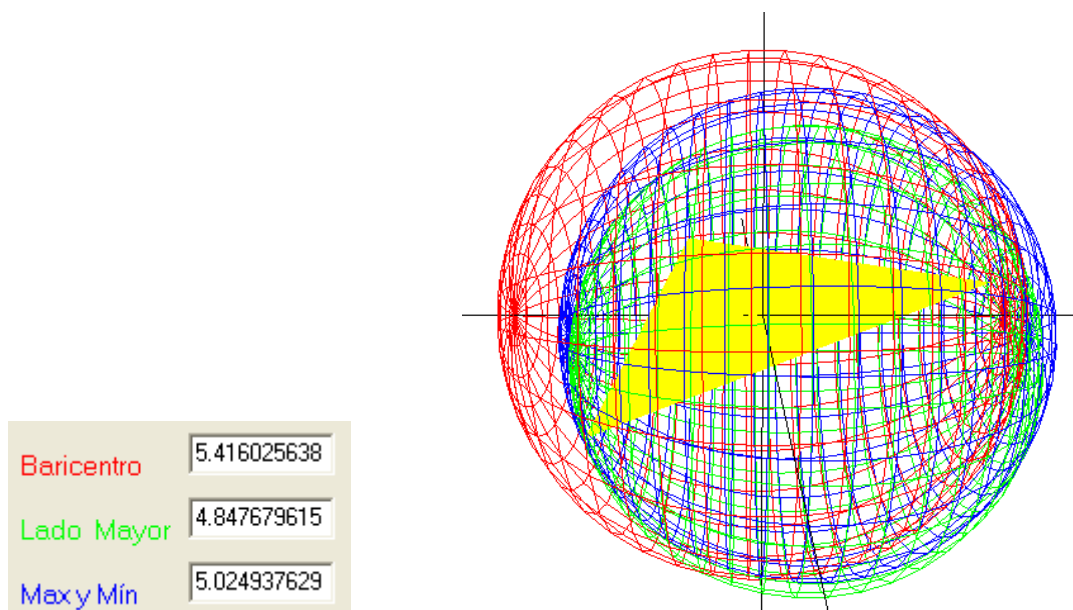


figura4.8 El valor del radio de cada una de las 3 esferas generadas por los tres métodos en 3D

Otro ejemplo se muestra a continuación

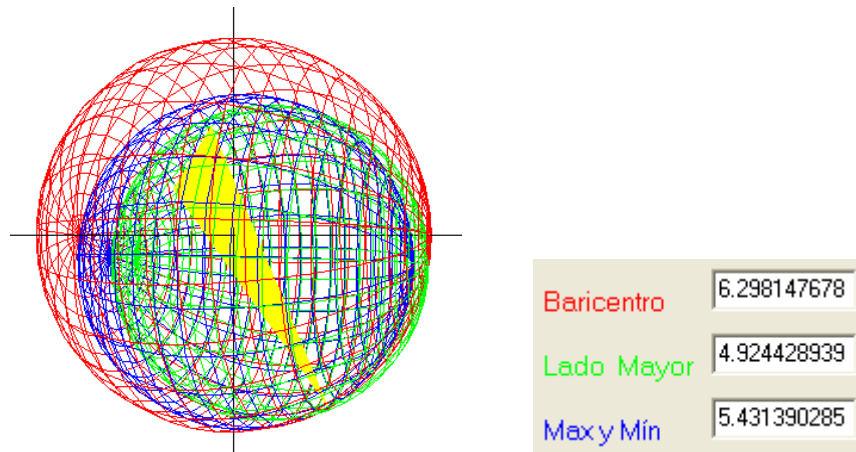


figura 4.9 El valor del radio de cada una de las 3 esferas generadas por los tres métodos en 3D

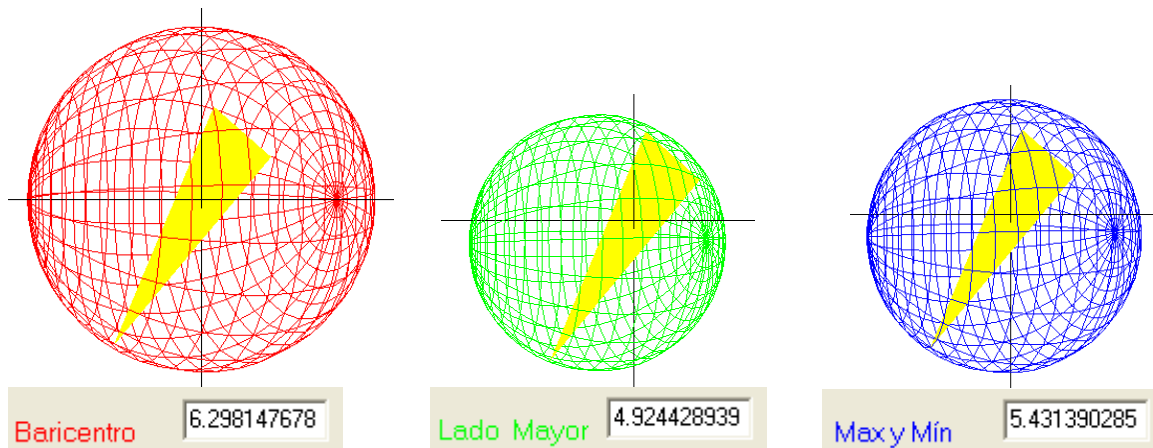


figura 4.10 El valor del radio de cada una de las 3 esferas generadas por los tres métodos en 3D, y se muestra la esfera generada por ellos en forma separada.

De las pruebas realizadas a los tres métodos se decide que método que genero las esferas de menor radio fue el de *Lado Mayor*, como se reporta en la tabla del apéndice A, por lo que será éste el que se utilice para resolver el problema.

4.3 ESFERA QUE CUBRE A DOS ESFERAS

Otro problema a resolver fue encontrar el método que calcule la esfera de menor radio que cubra dos esferas cualesquiera, para ello se probaron tres métodos:

- Radio mayor
- Máximos y mínimos
- Vectorización

RADIO MAYOR

Este método obtiene la esfera basándose en la distancia entre sus centros y el radio de la esfera mayor.

Primero obtiene la distancia entre los centros de las esferas.

Sean $c1$ y $c2$ los centros de las esferas y $r1$ y $r2$ los radios de las esferas, respectivamente

Se obtiene la distancia que existe entre los dos centros

$$d = Dis(c1, c2)$$

Se verifica cual radio es el mayor

$$rm = Radio_mayor(r1, r2)$$

Se obtiene el centro de la esfera que cubre las otras dos esferas, éste se calcula obteniendo el punto medio entre los dos centros de las esferas

$$ce = \left(\frac{x1 + x2}{2}, \frac{y1 + y2}{2} \right)$$

Y por último se obtiene el radio de la esfera que cubre a las dos esferas

$$radio = d/2 + rm$$

Este método genera una esfera cuya dimensión garantiza cubrir a las dos esferas dadas, pero esta esfera no será de radio menor.

Un ejemplo de este método en 2D se muestra en la figura 4.11, el valor del radio y el centro de las esferas se indican a la izquierda, las esferas de color negro y gris son las esferas a las que se les calculará la esfera envolvente.

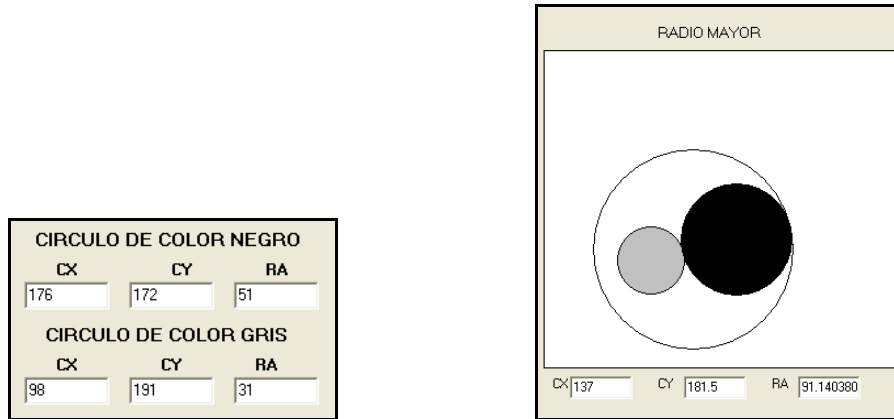


figura 4.11 A la izq. Se presentan el centro y el radio de las esferas a cubrirse y a la der. los mismos parámetros para la esfera que las envuelve utilizando el método de radio mayor.

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Este método calcula la caja envolvente que cubre a las dos esferas.

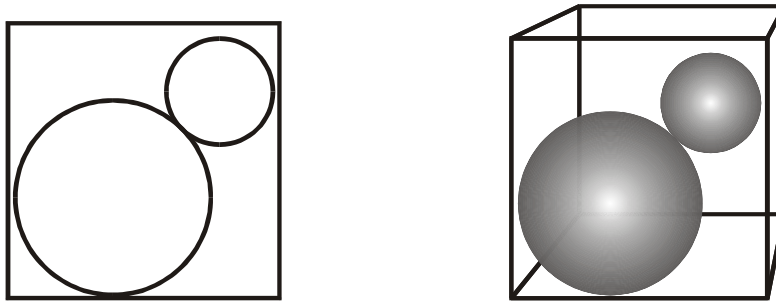


figura 4.12. Ejemplo de la caja envolvente para 2D y 3D

Obteniendo los valores máximos y mínimos en X, Y en 2D y X, Y, Z en 3D.

Posteriormente se calculan las coordenadas del centro de la caja, el cual será el centro de la nueva esfera.

$$cx = \frac{\max x + \min x}{2} \qquad cy = \frac{\max y + \min y}{2}$$

$$pc = (cx, cy)$$

Obtenido el centro de la caja, se obtiene el radio para la esfera determinando la distancia a cualquiera de los vértices de la caja.

$$vc = (\min x, \min y)$$

$$Radio = dis(pc, vc)$$

Un ejemplo de este método en 2D se muestra a continuación.

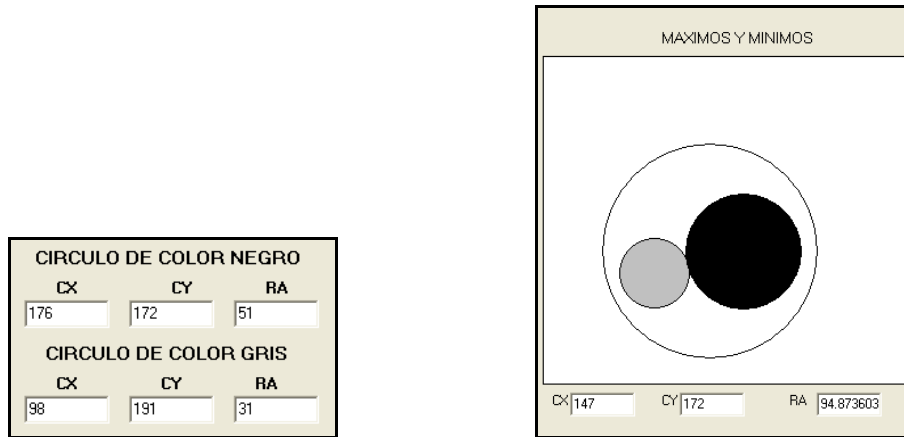


figura 4.13. A la izq. Se presentan el centro y el radio de las esferas a cubrirse y a la der. los mismos parámetros para la esfera que las envuelve utilizando el método de máximos y mínimos.

VECTORIZACIÓN

Este método lo que hace es prolongar la línea recta que forman los centros de las esferas y localizar el punto en el que intersecta con la superficie de las esferas, obteniendo con ello el diámetro de la esfera que cubre a ambas esferas, figura 4.14.

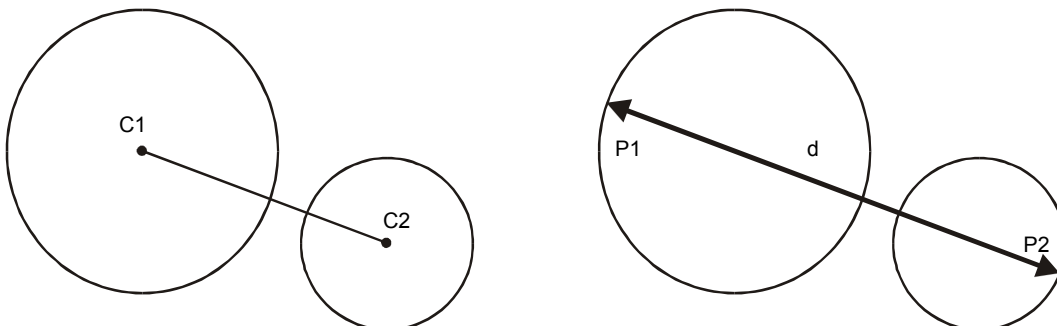


figura 4.14. Prolongación de la línea recta que une los dos centros, hasta unirla con los límites de las esferas

Después de haber obtenido los puntos de la recta prolongada, se calcula el centro de la esfera como el punto medio de los puntos calculados.

$$ce = \left(\frac{x1 + x2}{2}, \frac{y1 + y2}{2} \right)$$

Se calcula la distancia que existe entre estos dos puntos para determinar con ella el radio de la esfera.

$$d = Dis(p1, p2)$$

Y por último se obtiene el radio de la esfera como:

$$radio = d/2$$

Un ejemplo en 2D se muestra a continuación en la figura 4.15.

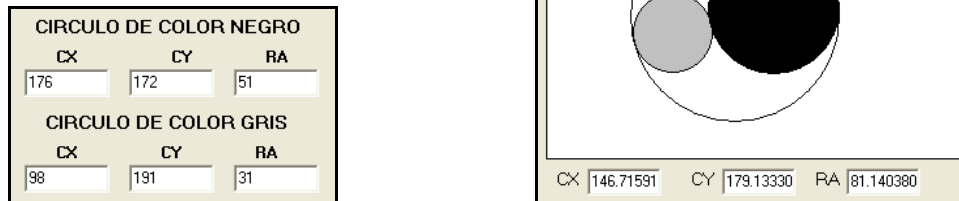


figura 4.15 . A la izq. Se presentan el centro y el radio de las esferas a cubrirse y a la der. los mismos parámetros para la esfera que las envuelve utilizando el método de Vectorización.

Este método demostró en las pruebas, ser el más eficiente de los tres ya que la esfera generada por él, es la de menor radio, así como se muestran en el apéndice B, estos tres métodos fueron probados en 2D y 3D.

Un ejemplo de los tres métodos en 3D se muestra a continuación.

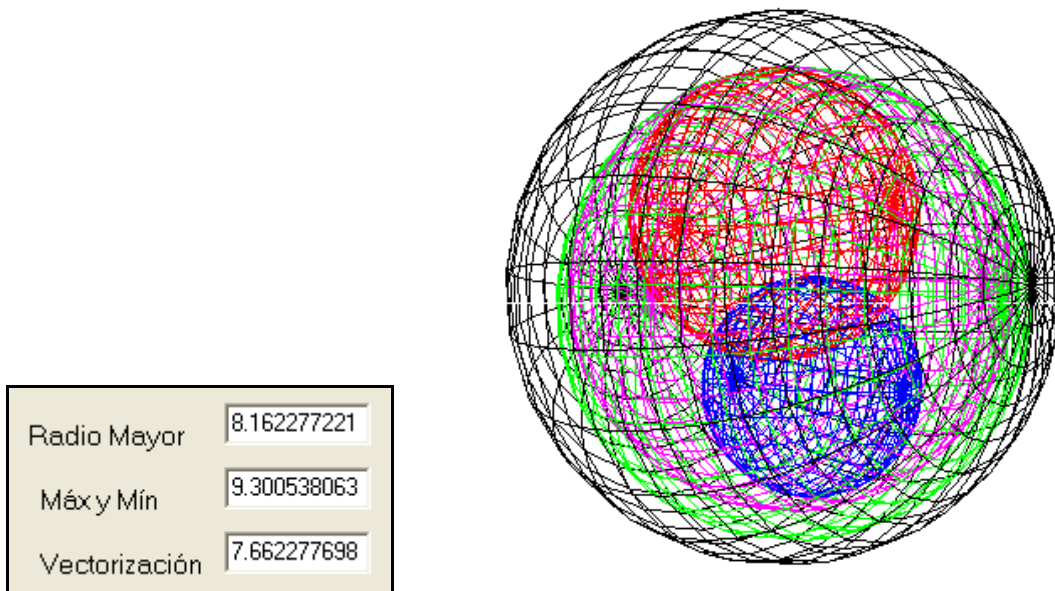


figura 4.16. El valor del radio generado por tres métodos en 3D, para la esfera que cubre otras dos

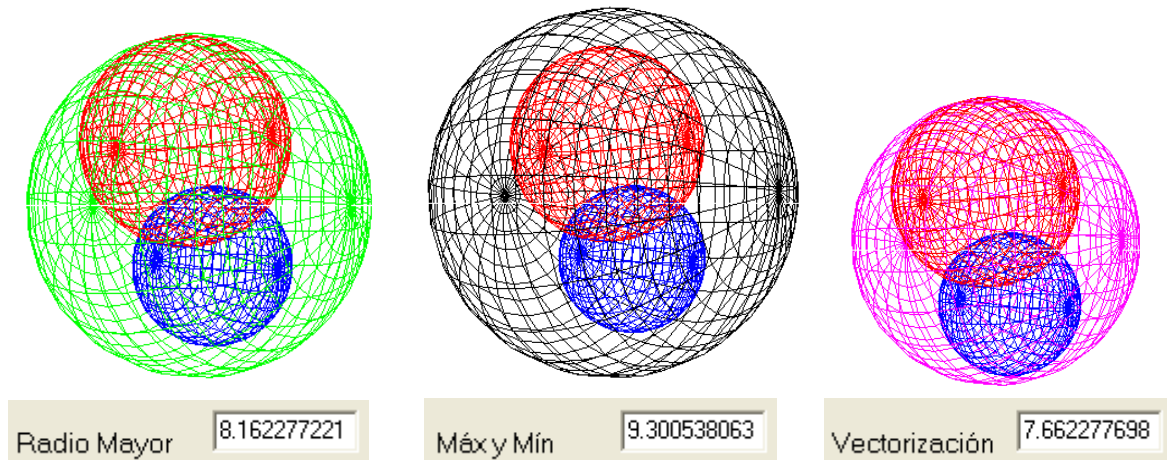


figura 4.17. El valor del radio generado por tres métodos en 3D, para la esfera que cubre otras dos, mostrándose las esferas de cada método separadamente.

4.4 ÁRBOL DE ESFERAS

Dos estructuras relacionadas para una eficiente detección de colisión son los modelos jerárquicos y las representaciones envolventes.

La herramienta de detección de colisión que desarrollamos utiliza una estructura jerárquica basada en un árbol binario y las representaciones envolventes están basadas en esferas.

4.4.1 ÚLTIMO NIVEL

La primera parte para la construcción del árbol es la generación de las esferas del último nivel, cubriendo con ellas la superficie del objeto con las esferas más pequeñas.

Cada una de las esferas cubre una de las figuras geométricas que forman la totalidad de la malla del objeto, el número de esferas del último nivel corresponde con el número de figuras geométricas que forman al objeto.

Supongamos que nuestro objeto es un cubo el cual tiene 12 triángulos que conforman su malla.

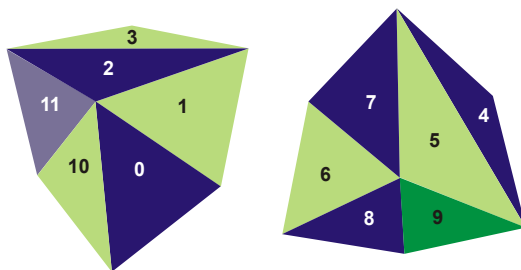


figura 4.18 El cubo en dos perspectivas

Se construyen las esferas que cubren a cada uno de los triángulos

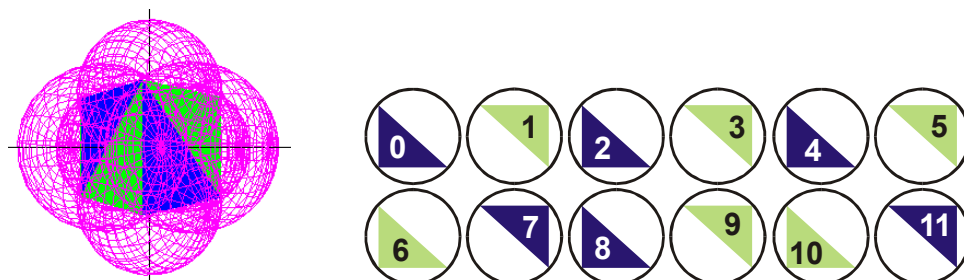


figura 4.19 El último nivel del árbol (nivel de hojas) y su representación gráfica en el objeto.

El método que se utiliza para calcular las esferas es el del *lado mayor* descrito en la sección 4.2. La construcción de esferas del último nivel consiste en tomar cada uno de los triángulos que forman la malla y calcularles la esfera que los cubre, sin considerar un orden específico, figura 26.

4.4.2 ORDENAMIENTO DEL NIVEL DE HOJAS

Después de haber calculado las esferas del último nivel y antes de crear el penúltimo nivel del árbol se aplicará un algoritmo para ordenar los triángulos.

El criterio del ordenamiento es el siguiente, para cada triángulo del nivel de hojas

- La hoja-esfera que se encuentra a su derecha contienen un triángulo que tiene un lado adyacente a él.
- La esfera que cubre las dos hojas-esferas de los triángulos es la de menor radio.

Es decir el triángulo colocado a la derecha tiene un lado en común con el triángulo que esta colocado a la izquierda.

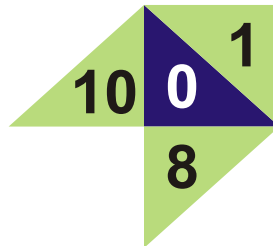


figura 4.20 Triángulo 0 y los triángulos que tiene un lado en común (adyacente), a él.

En la figura 4.20 se muestra a un triángulo, junto con los triángulos adyacentes a él. Pero son tres, así que la pregunta es: ¿Cuál se consideraría para ser colocado a la derecha?. Para esto se utiliza el segundo criterio.

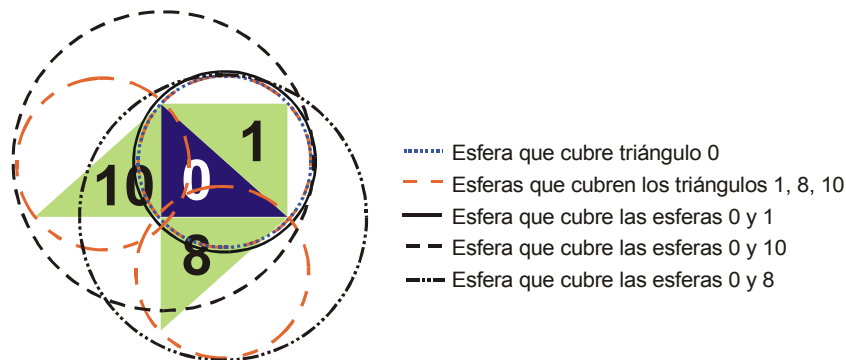


figura 4.21. Triángulo con sus triángulos adyacentes y las esferas que los cubren

Para este segundo requisito se seleccionará al triángulo que cumpla que la esfera que cubre a las dos esferas de ambos triángulos sea la de menor radio. En la figura 4.21, vemos que la esfera de menor radio es aquella que cubre a las esferas de los triángulos 0 y 1, por lo que el triángulo que se coloca a la derecha del 0 será el 1.

La manera en la que se realiza el ordenamiento es la siguiente, de la lista de triángulos que forman la malla que modela al objeto, se toma el primer triángulo de esta la lista.

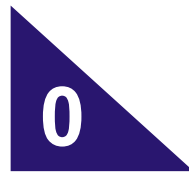


figura 4.22 Primer triángulo de la lista

Se localizan los triángulos que tengan un lado adyacente al él.

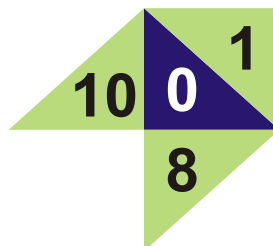


figura 4.23 Triángulo 0 con los triángulos que tiene un lado en común (adyacente)

Posteriormente se calcula para cada par de ellos (triángulo a tratar con sus tres triángulos adyacentes) la esfera que cubre a las dos esferas de cada uno de los triángulos, como lo muestra la siguiente figura.

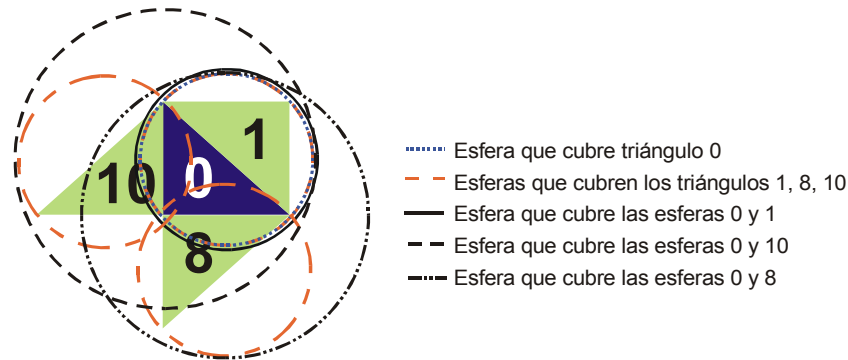


figura 4.24. Triángulo y sus triángulos adyacentes, y las esferas que los cubren

De las esferas calculadas vemos que la esfera que cubre las esferas de los triángulos 10 y 0, es la que presenta mayor radio, posteriormente la que cubre a los triángulos 0 y 8, y la de menor radio es la que cubre a las esferas de los triángulos 0 y 1. figura 4.24.

Entonces la esfera que contiene el triángulo 1 será la segunda hoja del árbol en el primer nivel, ya que como se menciono antes la hoja que se colocará a la derecha de otra será la que contenga a uno de sus triángulos adyacentes y además sea la esfera de menor radio que cubra a las dos. Por lo tanto las dos primeras hojas del último nivel serán las que se muestran en la figura 4.25.

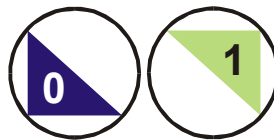


figura 4.25. Primeras dos hojas del árbol

Ahora se hará lo mismo para el triángulo 1, primero se buscaran los triángulos que tengan un lado adyacente a él, en esta ocasión sólo se encontrarán dos triángulos ya que uno de los tres adyacentes al triángulo 1 es el 0 y este ya fue colocado en el árbol.

En la siguiente figura se muestran los triángulos adyacentes al triángulo 1, los cuales son el triángulo 2 y 6. La figura 4.26, esta mostrando los triángulos en un

mismo plano, pero solo es para fines de explicación, porque los triángulos se toman con la orientación que presentan en el objeto



figura 4.26. Triángulo 0 con los triángulos que tiene un lado en común (adyacente) a él.

Los triángulos adyacentes al 1 son el 2 y el 6. Ahora se le calcula la esfera que cubre a las parejas 2 y 1 y a la pareja 1 y 6. figura 4.27

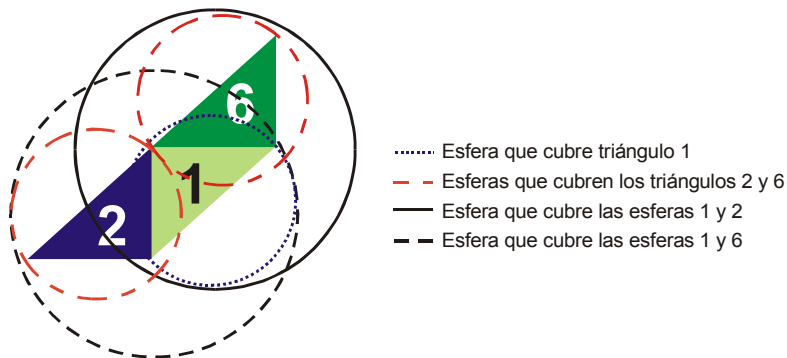


figura 4.27 Triángulo y sus triángulos adyacentes, y las esferas que los cubren

Ahora el triángulo 2 es el que asociado con el triángulo 1 generan la esfera de menor radio, por lo que el siguiente triángulo a colocarse en el árbol es el triángulo 2, esto se puede ver en la figura 4.28.

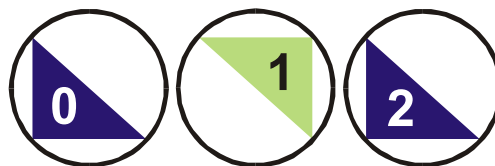


figura 4.28 Primeras tres hojas del árbol

Lo mismo sucederá con el triángulo 2, y así sucesivamente hasta quedar conformado el nivel de las hojas, como se muestra a continuación en la figura 4.29.



figura 4.29. Nivel de hojas del árbol

4.4.3 NIVELES DEL PENÚLTIMO AL PRIMER NIVEL

Los siguientes niveles son construidos de la forma siguiente, una vez calculado el nivel de hojas o último nivel, el penúltimo nivel se forma uniendo por pares el último nivel empezando de izquierda a derecha.

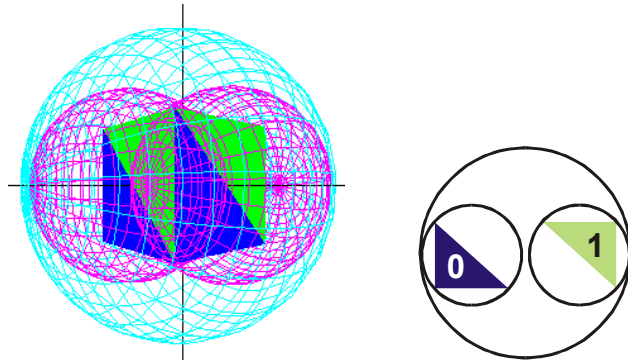


figura 4.30. La esfera de un nivel superior cubre a dos esferas del nivel inferior

La esfera debe cubrir a las dos esferas del nivel inferior que esta uniendo, como se muestra en la figura 4.30.

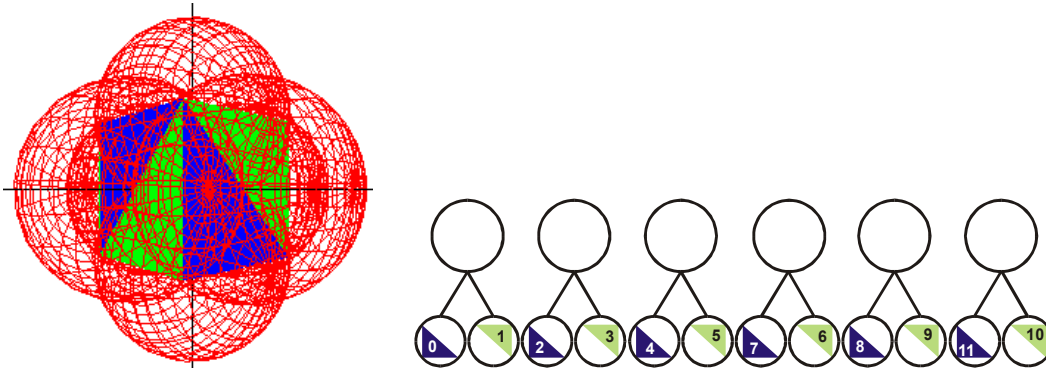


figura 4.31. Penúltimo nivel del árbol

En la figura 4.31, se muestra la estructura del árbol hasta el penúltimo nivel, así como su representación a nivel del objeto.

Lo mismo se hará para el siguiente nivel, se unirán, por pares las esferas, de izquierda a derecha.

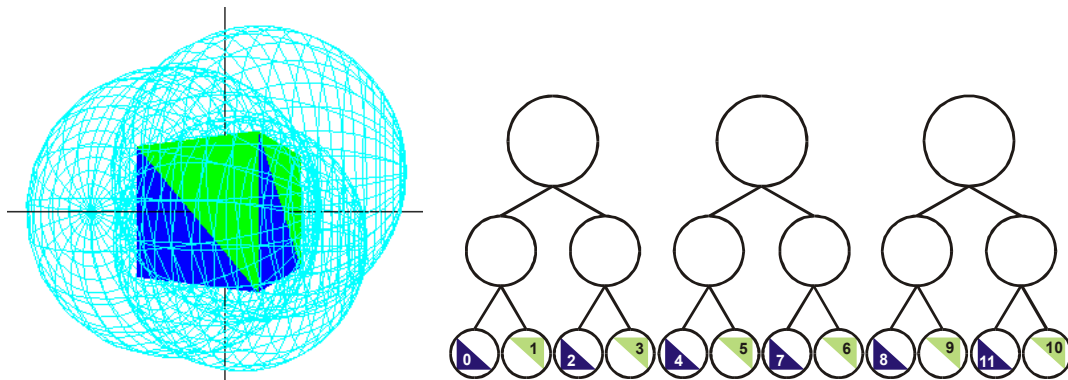


figura 4.32 Siguiete nivel del árbol

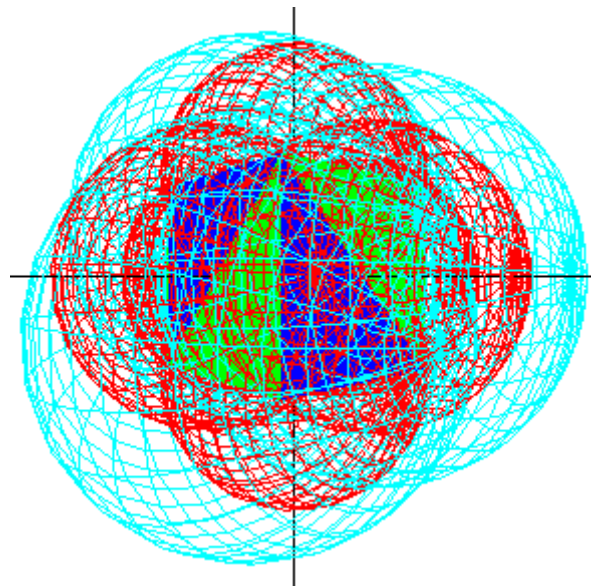


figura 4.33 Nivel 3 y 4 de esferas

Como podemos observar en la figura 4.33, el nivel 3 cubre en su totalidad al nivel 4 de esferas, siempre se debe ir cubriendo el nivel inferior con las esferas del nivel superior, ya que cada nivel, es un nivel de ajuste que representará al objeto en la fase de verificación de colisión

Los siguientes niveles se crean de la misma forma.

Si al unir por pares, alguna de las esferas no puede formar par, entonces la esfera del siguiente nivel tendrá la mismas características que su descendiente.

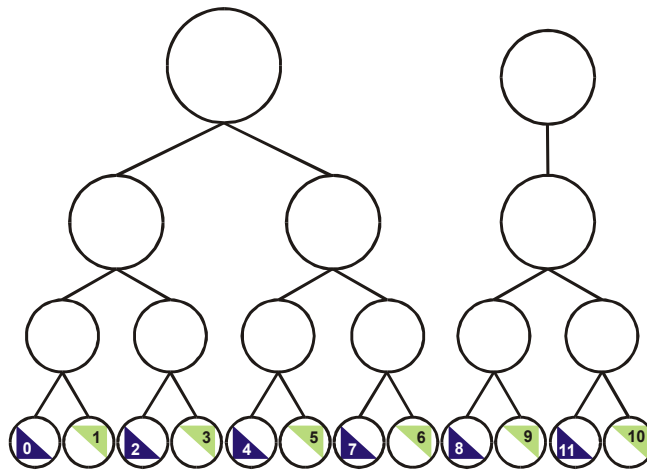


figura 4.34. Siguiendo nivel del árbol y esferas

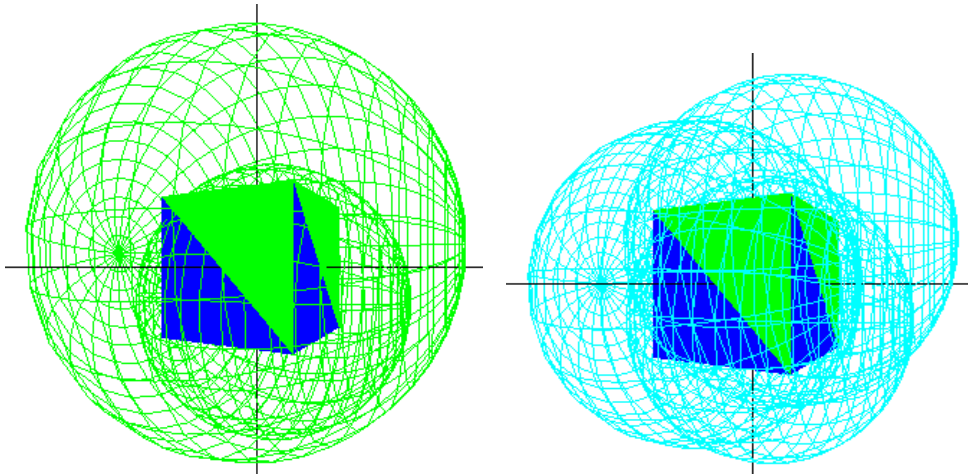


figura 4.35. Niveles 2 y 3 de esferas

En la figura 4.35 podemos observar como una de las esferas tiene el mismo tamaño que su esfera hija. En el nivel 2, hay 2 esferas y el nivel 3 presenta 3 esferas, al no poderse unir por pares una de ellas, la esfera padre toma las características de ubicación y tamaño de la esfera del nivel inferior.

El árbol se ira formando de nivel en nivel hasta llegar a la raíz, que tiene a la esfera que cubre en su totalidad al objeto.

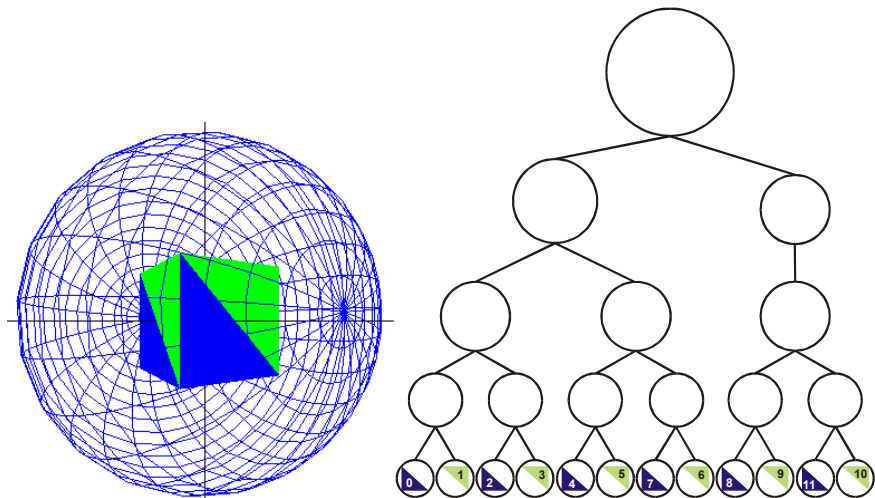


figura 4.36 Árbol que representa la estructura jerárquica del cubo y la esfera raíz

El nivel del árbol de cada objeto dependerá del número de triángulos que conforman la malla que forma al objeto.

$$h = \log_2 n$$

Donde,

h es la altura del árbol

n es el número de triángulos que conforman el objeto

El árbol binario se crea de abajo hacia arriba “Bottom-up”

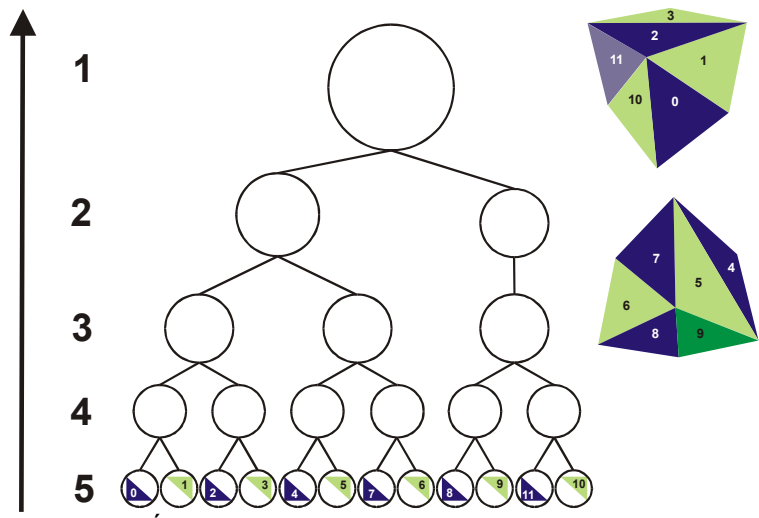


figura 4.37. Árbol construido del nivel más bajo hasta el primero

4.5 PSEUDOCÓDIGO. ETAPA DE PREPROCESAMIENTO

El siguiente pseudocódigo presenta la forma de construcción de la etapa de preprocesamiento

Entrada: Malla de triángulos

Salida: Estructura del árbol

1. Genera_esferas(malla)
2. posicion[0] <- Triángulo[0]
3. trian <- Triángulo[0]
4. Para i = 1 a num_trian
 - a. adya = Localiza_adyacentes(trian)
 - b. Genera esf_cubre(trian, adya)
 - c. t_m <- Verifica menor_tamaño(trian, adya)
 - d. posicion[i] <- t_m
 - e. trian <- t_m
5. arbol <- Gen_sigu_nivel(posicion)

En el paso 1, se generan las esferas del nivel de hojas, entrando las mallas de triángulos y obteniendo las esferas que cubren a cada uno de los triángulos

En el paso 2, se inicializa una lista llamada *posición* donde se irán colocando la posición de cada triángulo en el árbol.

En el paso 3, *trian* tiene el triángulo a analizar

El paso 4, se realiza el ordenamiento del nivel de hojas.

- En el inciso a: se localizan los triángulos que tengan un lado adyacente a él.
- En el inciso b: se generan las esferas que cubren a los pares de esferas de los triángulos adyacentes.
- En el inciso c: se verifica la esfera de menor tamaño
- En el inciso d: el triángulo que cumple estas dos características (lado adyacente y esfera de menor radio) se colocará en la siguiente posición
- En el inciso e: ahora se considera como *trian* el triángulo *t_m* que cumplió con las dos características.

En el paso 5, se generan los niveles del penúltimo al primero.

4.6 CONCLUSIONES DEL CAPITULO

En este capítulo se describieron los problemas que tuvimos al desarrollar la primera parte de nuestro algoritmo. Como ya se mencionó en la sección 4.1, fueron tres.

En el primero de ellos, en cual era calcular la esfera de menor radio que cubriese a un triángulo, estudiamos tres métodos a los cuales como hemos mencionado anteriormente en la sección 4.2, le dimos los nombres de *Baricentro*, *Máximos y mínimos* y *Lado mayor*, realizamos varias pruebas para determinar cual de ellos sería el más óptimo, ninguno de los métodos demostró en las pruebas calcular siempre la esfera de menor radio que cubriese a un triángulo, esto nos llevó a decidimos por el método que en la totalidad de las pruebas, fue el que obtuvo en la mayoría de las veces la esfera de menor radio, el resultado de las pruebas se muestra en el apéndice A. El método que implementamos en nuestro algoritmo fue el que llamamos lado mayor.

Para el segundo problema, realizamos pruebas con tres métodos los cuales ya fueron descritos en la sección 4.3, *Radio Mayor*, *Máximos y mínimos* y *Vectorización*. Con estos tres métodos también realizamos pruebas para determinar cual sería el óptimo e implementarlo en nuestro algoritmo. Las pruebas demostraron que ninguno obtuvo al cien por ciento de cada prueba la esfera de menor radio que cubriese a dos esferas, por que implementamos el que en la mayoría de las pruebas, obtuvo el mayor número de veces la esfera de menor radio, pueden observar los resultados de estas pruebas en el apéndice B.

El tercer problema al que nos enfrentamos fue decidir como colocar los triángulos en el nivel de hojas del árbol binario, implementamos la forma descrita en la sección 4.4.2. La malla de triángulos, no tiene un ordenamiento, es importante considerar uno, para colocar los triángulos en el último nivel de la estructura. Debemos garantizar que una rama del árbol tiene los triángulos que forman una parte del objeto. Si ordenamos los triángulos de un conejo de tal forma que una rama de la estructura jerárquica tiene los triángulos de la oreja izquierda y otra rama tiene los triángulos de la oreja derecha. Y supongamos que la oreja derecha esta en colisión con algún objeto, podemos podar la rama que contiene la oreja izquierda, sin ningún problema. Pero en el caso que ambas ramas tuvieran triángulos de ambas orejas no podríamos podar el árbol más rápidamente.

Es importante este ordenamiento, nosotros estamos proponiendo que los triángulos al irse formando tengan a sus lados triángulos adyacentes, para garantizar que las esferas están uniendo partes cercanas del objeto