

Capítulo 2 Propiedades útiles para resolver el PAV

2.1 Caminos y circuitos eulerianos y hamiltonianos

Un concepto interesante nace de uno de los problemas más viejos relacionados con la teoría de grafos que fue el problema de los puentes de Königsberg, que pregunta si es posible dar un paseo en la ciudad mostrada en la figura No. 2.1.a y regresar al punto de partida cruzando cada puente una sola vez. En 1936 el matemático suizo Leonhard Euler resolvió el problema. Construyó la gráfica de la figura No. 2.1.b reemplazando la tierra firme por vértices y los puentes por aristas; es decir Tierra 1 es el vértice t_1 , Tierra 2 es t_2 , la Isla 1 es el vértice i_1 y la Isla 2 es el vértice i_2 . La pregunta fue entonces : ¿existe un camino cerrado que contenga exactamente cada una de las aristas? Este camino se llama circuito de Euler o euleriano. Así un camino simple que contiene todas las aristas de una gráfica G se llama camino euleriano de G , o de otra manera se dice que un grafo conexo no vacío es un *camino Euleriano* si y solo si no tiene vértices de grado impar. Y un camino euleriano cerrado se llama *circuito euleriano* [KEN90].

Recordando que la valencia de un vértice en un grafo es el número de aristas que confluyen en él, se da el siguiente teorema :

Teorema 1 : *En un grafo que tiene un circuito euleriano todos los vértices deben tener valencia par [KEN90].*

Corolario 1 : *Un grafo que tenga un camino euleriano tiene o bien 2 vértices de valencia impar, o bien no tiene vértices de valencia impar [KEN90].*

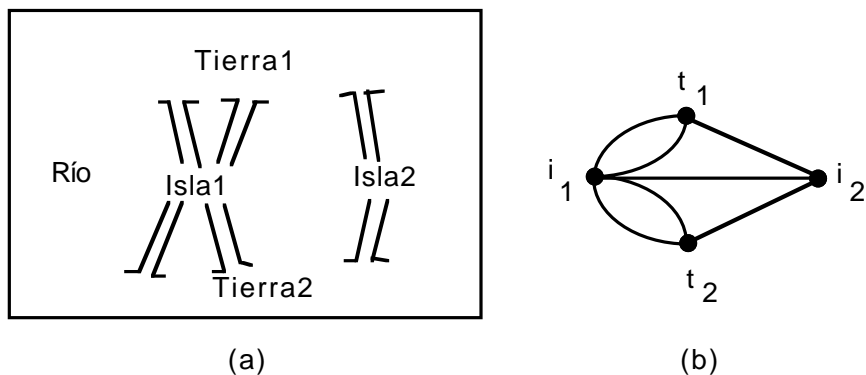


Figura 2.1 Grafo de Königsberg

El grafo que se muestra en la figura 2.2.a no tiene circuito euleriano ya que u y v tienen valencia impar, pero $b-a-c-d-g-f-e$ es un camino euleriano. En el grafo de la figura 2.2.b todos los vértices tienen valencia par y de hecho hay un circuito euleriano. En el grafo de la figura 2.2.c todos los vértices tienen valencia par pero no hay un circuito euleriano, la razón obvia es que la gráfica está formada por dos subgrafos que no están

conectados entre sí. Sin embargo, cada uno de los subgrafos tiene su propio circuito euleriano [KEN90].

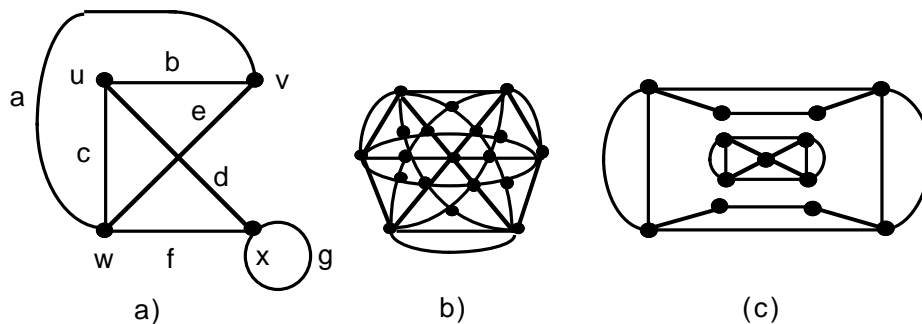


Figura 2.2 Circuitos eulerianos

Un camino que contiene todos y cada uno de los vértices de G es llamado un *camino Hamiltoniano de G* , similarmente un *ciclo Hamiltoniano de G* es un ciclo que contiene cada vértice de G . Un *grafo es Hamiltoniano* si este contiene un ciclo Hamiltoniano. Un ejemplo es el famoso grafo Hamiltoniano del dodecaedro, mientras que el grafo de Herschel no lo es, mostrados ambos en la figura 2.3 [BON76].

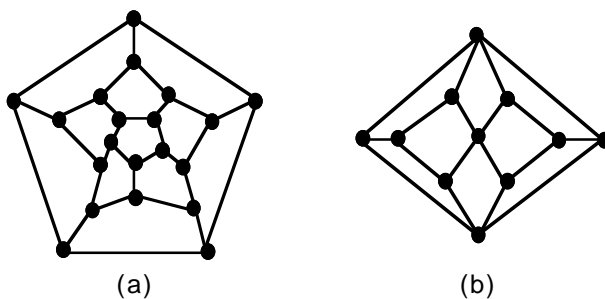


Figura 2.3 (a) Grafo hamiltoniano del Dodecaedro; (b) Grafo no hamiltoniano de Herschel

Dada la similitud en las definiciones de grafo Euleriano y grafo Hamiltoniano, y porque existe una caracterización particularmente útil de grafos Eulerianos, uno puede esperar un criterio análogo para los grafos Hamiltonianos, sin embargo no es el caso, dado que este debe ser considerado como uno de los mayores problemas sin resolver de la teoría de grafos para desarrollar una caracterización aplicable de grafos Hamiltonianos. Hay varias condiciones suficientes para establecer que un grafo es un grafo Hamiltoniano [KEN90].

Teorema 2 : *Si el grafo G no tiene lazos ni aristas paralelas, si $|V(G)| = n \geq 3$ y si $\text{val}(v) \geq n/2$ para cada vértice v de G , entonces G es hamiltoniano [KEN90].*

Teorema 3 : *Un grafo con n vértices y sin aristas ni lazos que tiene al menos $(1/2)(n-1)(n-2) + 2$ aristas es hamiltoniano [KEN90].*

Teorema 4 : *Suponer que el grafo G no tiene lazos ni aristas paralelas y que $|V(G)| = n \geq 3$. Si $val(v) + val(w) \geq n$ para cada par de vértices v y w que no están conectados por una arista, entonces el grafo G es hamiltoniano [KEN90].*

- Ejemplo 1 :**
- a) En la figura 2.4 se muestra en 2.4.a el grafo que tiene un circuito hamiltoniano $v-w-x-y-z$.
 - b) En la figura 2.4.b, se le añaden más aristas que no lo dañan, es decir, todo grafo completo K_n para $n \geq 3$ es hamiltoniano; además, se puede ir de vértice a vértice en el orden que se quiera.
 - c) En la figura 2.4.c, se tiene un camino hamiltoniano $v-w-x-y-z$ pero no tiene circuito hamiltoniano ya que no hay ningún ciclo por v .
 - d) En la figura 2.4.d se muestra que el grafo no tiene camino hamiltoniano.

Un grafo hamiltoniano con n vértices debe tener al menos n aristas. Esta condición es necesaria pero no suficiente, como lo ilustra la figura 2.4.d. Desde luego, los lazos y las aristas paralelas no son utilizables [KEN90].

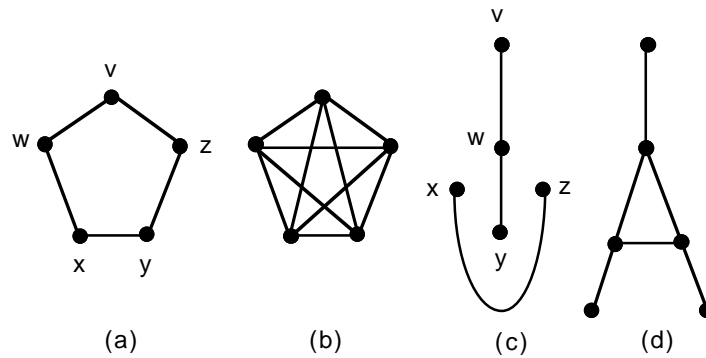


Figura 2.4 Circuitos Hamiltonianos del Ejemplo 2

- Ejemplo 2 :**
- a) El grafo K_5 de la figura 2.4.b tiene $val(v) = 4$ para cada v y tiene $|V(G)| = 5$, por lo que satisface la condición del teorema 2.
 - b) En la figura 2.5 cada uno de los grafos de la figura tiene $|V(G)| / 2 = 5/2$ y tienen un vértice de valencia 2. No satisfacen las hipótesis del teorema 2 y sin embargo son hamiltonianos.

El teorema 2 impone una condición uniforme a todos los vértices. El teorema 3 requiere solamente que haya suficientes aristas en alguna partes del grafo. Se establecen estas dos condiciones suficientes como consecuencia del teorema 4, que da un criterio en términos de pares de valencias de vértices [KEN90].

- Ejemplo 3 :**
- a) El grafo hamiltoniano de la figura 2.5.a tiene $n = 5$, lo que da $(1/2)(n - 1)(n - 2) + 2 = 8$. Tiene 8 aristas y por lo tanto satisface las hipótesis y la conclusión del teorema 3.

b) El grafo hamiltoniano de la figura 2.5.b tiene también $n = 5$ y por lo tanto $(1/2)(n - 1)(n - 2) + 2 = 8$, pero tiene sólo 7 aristas. No satisface las hipótesis del teorema 3 ni las del teorema 2. Si no hubiera un vértice en medio, tendríamos K_4 , con $n = 4$ por lo que $(1/2)(n - 1)(n - 2) + 2 = 5$, y las 6 aristas serían más que suficientes. En estos términos el grafo satisface las hipótesis del teorema 4.

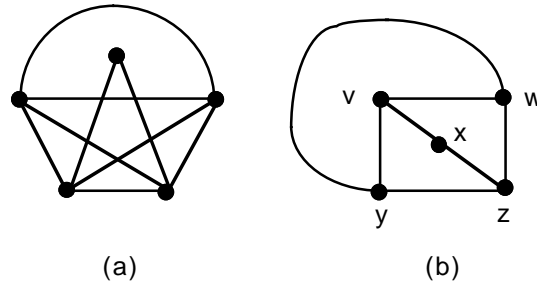


Figura 2.5 Circuitos hamiltonianos del Ejemplo 3

Ejemplo 4 : Para el grafo de la figura 2.5.b, $n = 5$. Hay tres pares de vértices distintos que no están conectados por ninguna arista. Verificamos que se cumplan las hipótesis del teorema 4 examinándolos :

Para $\langle v, z \rangle$,	$\text{val}(v) + \text{val}(z) = 3 + 3 = 6 \geq 5$;
Para $\langle w, x \rangle$,	$\text{val}(w) + \text{val}(x) = 3 + 2 = 5 \geq 5$;
Para $\langle x, y \rangle$,	$\text{val}(x) + \text{val}(y) = 2 + 3 = 5 \geq 5$.

Es importante recalcar un tipo de grafo que será empleado para representar un problema PAV en este proyecto, este es el grafo completo. Del que se dice : un grafo sin aristas paralelas y sin lazos y en las cuales cada vértice está unido por una arista a cada uno de los otros vértices es llamado un *grafo completo* [KEN90]. Un grafo completo con n vértices tiene todos sus vértices con valencia $n-1$, por lo que es un *grafo regular*. Todos los grafos completos de n vértices son isomorfos unos a otros, y tienen un alto grado de simetría. Se muestra un ejemplo de un grafo completo en la figura 2.4.b [KEN90].

2.2 Marco histórico del PAV

Hay muchos problemas NP-Completo muy interesantes, uno de ellos es el Problema del Agente Viajero (PAV), del que se mencionará brevemente su historia. La primera noticia que se tiene del PAV fue en 1831; en Alemania un libro fue publicado y titulado como "Der Handlungsreisende" o bien "El Agente Viajero", donde se hacía la pregunta ¿Cómo debe de ser un agente viajero y que debe hacer para vender más y ser exitoso en su negocio? Respondiendo a esta pregunta con un programa de recorridos para poder cubrir tantas localidades como fuera posible sin visitar una localidad dos veces [VOI83].

Pero la historia del PAV desde el punto de vista algorítmico ha evolucionado gracias a que este problema ha sido una excelente plataforma de pruebas para la introducción de nuevas ideas algorítmicas como las relajaciones Lagrangean para el Recocido Simulado (Simulated Annealing), búsqueda Tabú, algoritmos Genéticos, Redes

Neuronales, etc. además mucha investigación se ha concentrado en el estudio de buenos algoritmos aunque no necesariamente óptimos en la solución. Se han probado problemas de la vida real tanto como problemas generados aleatoriamente para ciudades que fluctúan entre 100 y 1,000,000 ciudades. La heurística Spacefilling Curve de Bartholdi y Platzman es muy rápida. Para un PAV geométrico de un millón de ciudades, este algoritmo llega a la solución con un 35% de Held-Karp de la cota mas baja en una ruta óptima en 22 segundos en una computadora SGI Challenge con 150 Mhz. El algoritmo Iterated Lin-Kernighan originalmente propuesto por Martin, Otto y Felten, para un millón de ciudades, puede resolver el problema con una exactitud de 1.07%, pero toma 500 horas en hacerlo, este mismo algoritmo para 1000 ciudades llega con una exactitud de 0.9% en sólo 30 segundos. Otro algoritmo llamado Branch and Cut ha sido un éxito en soluciones no triviales con 4,461 ciudades [JOH94].

2.3 PAV como un problema NP-Completo

Retomando la definición 10 del Capítulo 1 sección 1.2 :

Definición 1 : *Un problema A es reducible polinomialmente a un problema B (notación $A \alpha B$) si hay un algoritmo en tiempo polinomial que transforme instancias de A en instancias de B en tal forma que las instancias de A y las instancias transformadas siempre tengan la misma solución [SMI89]. No es difícil ver que si $A \alpha B$ y si $B \alpha C$, entonces $A \alpha C$. En otras palabras, la relación α es transitiva.*

Se puede entonces pensar intuitivamente que el PAV es en algún sentido un problema más difícil que el HC. Se formaliza ahora esta intuición en un teorema.

Teorema 5 : $HC \alpha PAV$ [SMI89].

Prueba : Una instancia de HC consiste de un grafo dirigido. Se construye una instancia del problema de decisión PAV, consistiendo de un costo objetivo o costo meta T y un grafo dirigido para el cual cada arista tiene un peso, como sigue :

Sea un conjunto de vértices en la nueva instancia que sea la misma que en la instancia HC. Y sea el peso de la arista (a,b) de 1 si la arista dirigida (a,b) esta presente en el grafo HC y el peso de 2 de otra forma. Sea el costo objetivo T igual a n .

Ya que todas las rutas contienen n aristas, la existencia de una ruta de costo n implica que cada una de las aristas incluidas tengan un costo de 1, esto es, cada una de las aristas incluida en la ruta aparece en la instancia HC. Así una ruta de costo n implica una solución para la instancia HC. A la inversa, si hay una solución HC, entonces cada una de las aristas que aparecen en la solución tienen un costo de 1 en la instancia PAV, y hay así una solución para el PAV de costo n . En la figura 2.6.b se presenta la instancia PAV correspondiendo a la instancia HC de la figura 2.6.a. La construcción de la instancia PAV

puede ser claramente hecha en tiempo polinomial, así se tiene demostrado que $HC \propto PAV$ [SMI89].

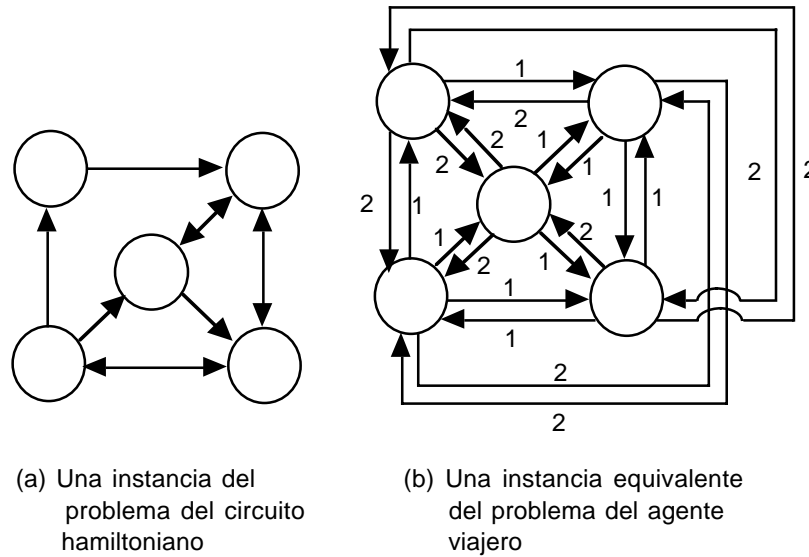


Figura 2.6 Reducción polinomial del problema del circuito hamiltoniano (HC) al problema del agente viajero (PAV)

2.4 Optimización local para el PAV

La búsqueda local u optimización local, es una de las formas primitivas de aplicar optimización continua en un espacio de búsqueda discreto.

Ejemplo 5 : Un problema que se puede resolver con exactitud mediante búsqueda local es el de los árboles abarcadores minimales. Las transformaciones locales son aquellas en las que se toma alguna arista que no se encuentra en el árbol abarcador actual, se agrega al árbol, que debe producir un ciclo único, y después eliminar exactamente una arista del ciclo (probablemente la de costo mayor) para formar un árbol nuevo.

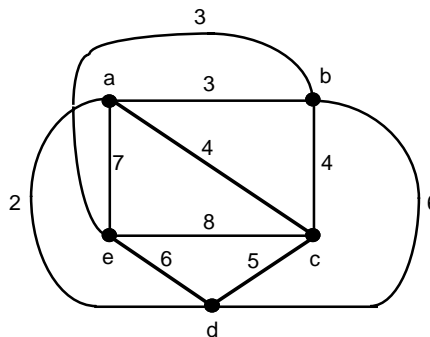


Figura 2.7 Un caso del PAV

Por ejemplo considérese el grafo de la figura 2.7. Se empieza con el árbol mostrado en la figura 2.8.a. Una transformación que se puede realizar es agregar la arista (d, e) y

quitar otra del ciclo formado, el cual es (e, a, c, d, e). Si se elimina la arista (a, e), se reduce el costo del árbol de 20 a 19. Esa transformación puede hacerse dejando el árbol de la figura 2.8.b, al cual se intenta aplicar de nuevo una transformación de mejora, como insertar la arista (a, d) y eliminar la (c, d) del ciclo formado. El resultado se muestra en la figura 2.8.c. Después es posible introducir (a, b) y eliminar (b, c), como en la figura 2.8.d, y más tarde introducir (b, e) en favor de (d, e). El árbol resultante de la figura 2.8.e es el árbol mínimo. Se puede comprobar si cada arista ausente en ese árbol tiene costo mayor que cualquiera otra arista dentro del ciclo que forma. Así, ninguna transformación es aplicable a la figura 2.8.c [AHO74].

El tiempo requerido por el algoritmo del ejemplo 5 en un grafo de n nodos y a aristas depende del número de veces que se necesite mejorar la solución. La sola prueba de que ninguna transformación es aplicable puede llevar un tiempo $O(na)$, ya que deben probarse a aristas, y cada una puede formar un ciclo de longitud cercana a n . Así, el algoritmo no es tan bueno como los algoritmos de Prim o de Kruskal, pero sirve como ejemplo de que puede obtenerse una solución óptima por búsquedas locales.

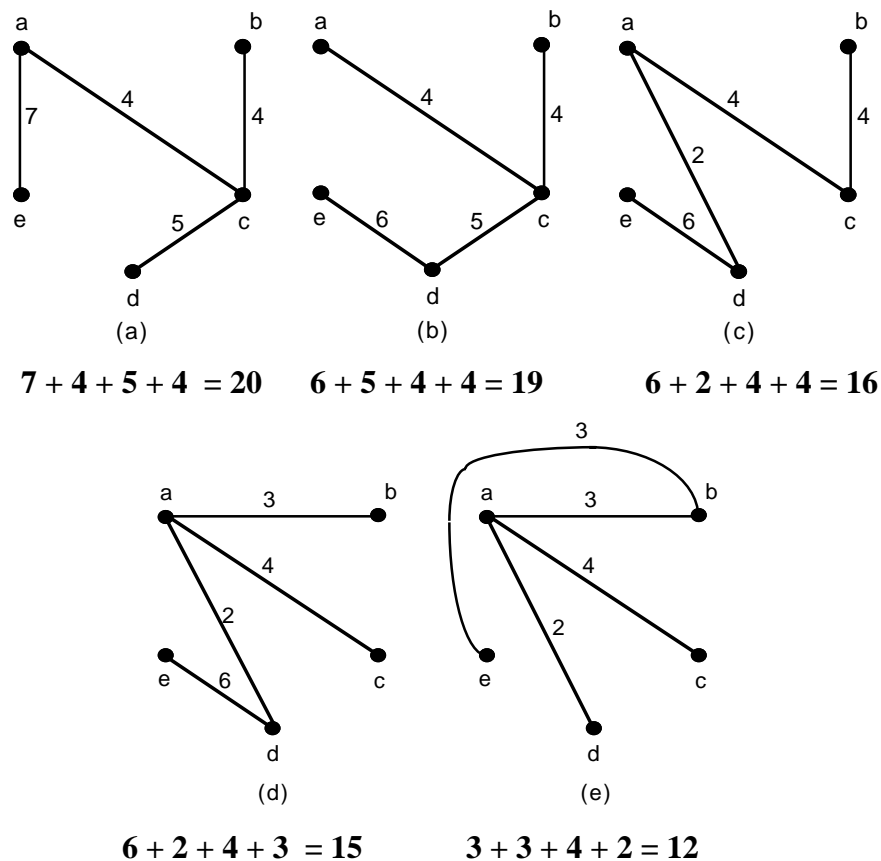


Figura 2.8 Búsqueda local para un árbol abarcador minimal

2.4.1 Algoritmos de aproximación por búsqueda local

El PAV es uno de los problemas en que las técnicas de búsqueda local han sido muy satisfactorias. La transformación más simple que se ha usado se conoce como "Dos

Optimal", "2-Opt" u "Opción doble". Consiste en tomar dos aristas cualesquiera, tales como (A, B) y (C, D) de la figura 2.9, quitándolas y reconectando sus extremos para formar un recorrido nuevo. En la figura 2.9, el recorrido nuevo va desde B hasta C en el sentido de las manecillas del reloj, después sigue por la arista (C, A), desde A hasta D en sentido contrario al de las manecillas del reloj y finalmente por la arista (D, B). Si la suma de las longitudes de (A, C) y (B, D) es menor que la suma de las longitudes de (A, B) y (C, D), se tendrá un recorrido mejorado. Obsérvese que no se pueden conectar A con D y B con C, pues, el resultado no sería un recorrido, sino dos ciclos disjuntos. Para encontrar un recorrido localmente óptimo, se comienza con un recorrido aleatorio, y se consideran todos los pares de aristas adyacentes, como (A, B) y (C, D) de la figura 2.9. Si el recorrido puede mejorarse reemplazando esas aristas por (A, C) y (B, D), se hace así, y se prosigue considerando los pares de aristas que no se consideraron anteriormente. Obsérvese que las aristas introducidas (A, C) y (B, D) deben emparejarse cada una con todas las demás del recorrido, ya que pueden resultar mejoras adicionales [AHO74]. Se describirá con detalle en el Capítulo 4.

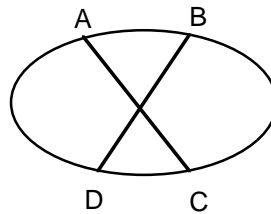


Figura 2.9 2-Opt

2.5 Problemas importantes NP Completos relacionados con el PAV

Son muy importantes las tres variaciones del PAV normal mostradas en la Introducción sección I.2.1 de este documento, donde se trata el PAV como un problema de decisión, como un problema de optimización combinatorial y como un problema euclidiano [STI87]. Hay además otras variaciones del PAV como son:

a) Extensión del Agente Viajero

Conocido con el nombre de Traveling Salesman Extension (TSE). En este problema se tiene una ruta parcial, pero se desea saber si se puede generar el circuito completo sin exceder un cierto peso, por ejemplo se desea recorrer toda la República Mexicana, pero se tiene una parte de la ruta ya pensada, por lo que la pregunta sería si ¿se puede completar la ruta sin que cueste más de \$5000.00? [GAR79].

Instancia : Un conjunto finito $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ de ciudades, una distancia $d(c_i, c_j) \in Z^+$ para cada par de ciudades $c_i, c_j \in C$, una cota $B \in Z^+$, y una ruta "parcial" $\Theta = \langle c_{\Pi(1)}, c_{\Pi(2)}, \dots, c_{\Pi(K)} \rangle$ de K distintas ciudades desde C , $1 \leq K \leq m$.

Pregunta : ¿Puede Θ ser extendida para una ruta completa $\langle c_{\Pi(1)}, c_{\Pi(2)}, \dots, c_{\Pi(K)}, c_{\Pi(K+1)}, \dots, c_{\Pi(m)} \rangle$ teniendo una longitud total B o menos ?.

b) Problema del Agente Viajero Simétrico

Conocido como el Symmetric traveling salesman problem (TSP o PAV). Dado un conjunto de n nodos y distancias para cada par de nodos, encontrar una longitud total mínima que visite cada uno de los nodos exactamente una vez. La distancia del nodo i al nodo j es la misma que del nodo j al nodo i [WWW6].

c) Problema del Agente Viajero Asimétrico

Conocido como Asymmetric Traveling Salesman Problem (ATSP). Dado un conjunto de nodos y distancias para cada par de nodos, encontrar una ruta de longitud total mínima que visite cada uno de los nodos exactamente una vez. En este caso, la distancia del nodo i al nodo j y la distancia del nodo j al nodo i puede ser diferente [WWW6].

d) Problema del Agente Viajero Re-visitado

Teorema 6 : *El problema de determinar una ruta óptima en el problema del Agente Viajero Simétrico con n ciudades (por ejemplo con una matriz de costos simétrica) es NP-Duro [REI96].*

Pregunta : El problema del Agente Viajero simétrico puede ser visto como el problema de encontrar un ciclo hamiltoniano de costo mínimo, en un grafo no dirigido con pesos.

Prueba : Con esto en mente, es fácil probar que el problema de determinar la existencia de un ciclo hamiltoniano en un grafo no dirigido es transformable en el problema del agente viajero simétrico.

Dado un grafo no dirigido $G = (V, E)$, $|V| = n$, se construye un problema del agente viajero asimétrico de n ciudades como sigue :

Sea $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. El costo de ir entre las ciudades i y j es definido por

$$C_{ij} \begin{cases} 1 & \text{si } (v_i, v_j) \in E, \\ 2 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Claramente, el costo de una ruta óptima es n si G contiene un ciclo hamiltoniano; si G no contiene un ciclo hamiltoniano, el costo de una ruta óptima debe ser al menos $n + 1$ ($n - 1$ aristas de costo 1 y una arista de costo 2) [REI96].

e) Problema de Ordenamiento secuencial

Conocido con el nombre de Sequential Ordering Problem (SOP), este problema es un problema del Agente Viajero Asimétrico con limitaciones adicionales. Dado un conjunto de n nodos y distancias para cada par de nodos, encontrar un camino

Hamiltoniano del nodo 1 al nodo n de longitud mínima, camino que toma en cuenta las limitaciones anteriores. Cada restricción precedente requiere de algún nodo i que tiene que ser visitado antes que algún otro nodo j [WWW6].

f) Problema del Agente Viajero Geométrico

Conocido como el Geometric Traveling Salesman Problem (GTS o PAVG). Se tienen ciudades en el plano y se quiere encontrar si hay un circuito solución del PAV que no se pase de por ejemplo 1000 Km. La distancia es la euclidiana en términos de enteros (redondeo hacia arriba). Su definición matemáticas es [GAR79]:

Instancia : Sea un conjunto $P \subseteq Z \times Z$ de puntos en el plano, y un entero positivo B.

Pregunta : ¿ Existe un recorrido de longitud B o menor para el problema del agente viajero con $C = P$ y $d((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ igual a la distancia euclidiana discretizada $\lceil ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)^{1/2} \rceil$?.

g) Cuello de botella del Agente Viajero

Conocido como Bottleneck Traveling Salesman [GAR79].

Instancia : Sea un conjunto C de m ciudades, la distancia $d(c_i, c_j) \in Z^+$ para cada par de ciudades c_i, c_j elementos de C, y un entero positivo B.

Pregunta : ¿ Hay una ruta de C cuya arista mas larga no es mayor que B, por ejemplo una permutación $\langle c_{\pi(1)}, c_{\pi(2)}, \dots, c_{\pi(m)} \rangle$ de C tal que $d(c_{\pi(i)}, c_{\pi(i+1)}) \leq B$ para $1 \leq i < m$ y tal que $d(c_{\pi(m)}, c_{\pi(1)}) \leq B$?

h) Problema del Agente Viajero cumpliendo la desigualdad del triángulo

El PAV es un problema que satisface la desigualdad del triángulo que consiste en $d(c_i, c_j) \leq d(c_i, c_k) + d(c_k, c_j)$ para toda tripleta de ciudades, dicho de otra manera, la distancia más corta entre dos ciudades en el plano es una línea recta, que corresponde a una ruta directa.

Es importante recalcar que, la desigualdad del triángulo se cumple en las versiones geométricas del PAV (donde las ciudades corresponden a puntos en un espacio métrico y las distancias son calculadas de acuerdo a la métrica del espacio, ya sea esta euclidiana, rectilínea, u otra), y la distancia corresponde a la longitud del camino más corto entre dos puntos [LAW85].

i) Problema del cartero chino

Un cartero lleva el correo desde la oficina de correo hasta su destino, es decir lo reparte y cuando regresa a la oficina, el debe por supuesto, cubrir cada una de las calles en esa área al menos una vez. Sujeto a esta condición, el desea escoger su ruta en tal forma que el camine tan poco como sea posible. Este problema es conocido como el

Problema del Cartero Chino, desde que fue considerado por el matemático chino Kuan en 1962. En un grafo con peso se define el peso de una ruta $v_0e_1v_1\dots e_nv_n$ que será $\sum_{i=1}^n w(e_i)$.

Claramente se nota que el problema de cartero chino es justamente el encontrar un camino con peso mínimo en un grafo conexo con pesos que no deben ser negativos. Refiriéndose a este camino como el camino óptimo. Si G es Euleriano, entonces cualquier camino Euleriano de G es un camino óptimo porque el camino Euleriano es un camino que navega a través de cada vértice exactamente una vez. El Problema del cartero chino se resuelve fácilmente en este caso ya que existe un buen algoritmo para determinar un camino Euleriano en un grafo Euleriano. El algoritmo se debe a Fleury, donde construye un camino Euleriano trazando un rastro, sujeto a una condición, que en cualquier estado, una arista de un subgrafo no-trazado es tomado solamente si no hay alternativa [BON76].

j) Cartero rural

Conocido como Rural Postman [GAR 79].

Instancia: El grafo $G = (V, E)$, de longitud $l(e) \in \mathbb{Z}_0^+$ para cada $e \in E$, subconjunto $E' \subseteq E$, límite $B \in \mathbb{Z}^+$.

Pregunta: ¿Hay un circuito en G que incluya cada arista en E' y que tiene una longitud total no mayor que B ?

k) Problema del circuito Hamiltoniano

También conocido como Hamiltonian cycle problem (HCP) y que consiste en : Dado un grafo, probar que el grafo contiene o no un ciclo Hamiltoniano como lo define [WWW6]. O una definición más formal como la de [GAR 79] :

Instancia: Un grafo $G = (V, E)$

Pregunta: ¿ G contiene un circuito hamiltoniano?

Teorema 7: *Un circuito hamiltoniano es NP-Completo.* [GAR 79]

l) Problema del circuito Dirigido Hamiltoniano

Conocido como Directed Hamiltonian Circuit [GAR 79].

Instancia: Sea un grafo dirigido $G = (v, A)$.

Pregunta: ¿ G contiene un circuito dirigido hamiltoniano?

ll) Problema del camino Hamiltoniano

Conocido como Hamiltonian Path [GAR 79].

Instancia: Sea un grafo $G = (V, E)$.

Pregunta : ¿G contiene un camino hamiltoniano?

2.6 Teoría para el Análisis de Resultados

Para la evaluación de un algoritmo hay un número de criterios que relacionan aspectos intrínsecos con la expresión y ejecución del algoritmo. Entre los criterios que se consideran para determinar lo que es un buen algoritmo, se incluyen cuestiones subjetivas tales como : sencillez, claridad, adaptabilidad a los datos a manejar, etc. La ingeniería de Software intenta tratar con bases matemáticas estos términos, y así tener parámetros para evaluar lo que significa que un algoritmo sea sencillo y claro. Medidas más objetivas (lo que no significa que necesariamente tengan que ser mas importantes), es la complejidad en tiempo y espacio del algoritmo, su propiedad de convergencia, la claridad y precisión de sus resultados, etc. De entre los criterios y propiedades de los algoritmos que se usan más comúnmente para evaluarlos , son [PIA99] :

- a) cociente de aproximación de un algoritmo
- b) Factor de convergencia o Factor de garantía
- c) La calidad de la solución que proporcionan
- d) La complejidad en tiempo y espacio del algoritmo

La calidad de un software se manifiesta en la alta o baja confiabilidad del producto asociadas con su desempeño en tiempo de ejecución y en que tan cerca se encuentra la respuesta de la solución real. Por lo tanto para cuantificar la calidad del software es relevante hacer un estudio de la complejidad computacional, así como de la exactitud de las soluciones que dan tales algoritmos. Pero, ¿qué es complejidad computacional? Es el estudio de la cantidad de esfuerzo computacional que es necesario para realizar cierto tipo de computaciones [WIL86]. En este aspecto la literatura reporta que ya se han realizado estudios a cerca de la complejidad de los algoritmos que se emplearon en este proyecto, por lo que solo se toman estos resultados reportados y se usan en su oportunidad para el análisis de los resultados.

Con respecto a la exactitud de las soluciones se hacen ciertas estadísticas, pero es necesario aclarar que no se profundizan porque estas son una herramienta para afirmar el comportamiento de las técnicas de solución; dado que, lo realmente importante para este proyecto es el punto de vista computacional. Por esta razón se realizan interpolaciones y regresiones de polinomios y exponenciales con la ayuda de Microsoft Excel 98.