

Capítulo 5 Comparación de Algoritmos y Análisis de Resultados

Para la solución del PAV se implementaron en Java siete técnicas de solución reunidas en el software llamado "Técnicas de Solución al PAV". Ante esto, puede elegirse entre tres enfoques. Si el grafo es pequeño se puede buscar una solución óptima a través de una búsqueda exhaustiva, intentando todas las posibilidades. Para grafos grandes, en cambio, este enfoque resulta prohibitivo por su costo, sin importar qué grado de eficiencia se intente dar al software que lo resuelva. El segundo enfoque consiste en buscar información adicional sobre el problema. Podría suceder que el grafo tuviera propiedades especiales que hicieran innecesario probar todas las posibilidades para hallar una solución óptima. El tercer enfoque consiste en cambiar un poco el problema y buscar una solución buena aunque no necesariamente óptima; podría ser suficiente con encontrar una solución que determinara un costo cercano al mínimo y la ruta respectiva en grafos pequeños o grandes. Un algoritmo que produce con rapidez soluciones buenas, pero no necesariamente óptimas, se denomina heurístico [AHO74].

Así nació la inquietud de implementar una técnica de solución exacta como es la "Búsqueda Exhaustiva Ingenua", pero también explorar el segundo enfoque aprovechando ciertas propiedades que permitieran podar las ramas del árbol de búsqueda teniendo la solución exacta sin explorar necesariamente en forma completa el espacio de búsqueda, por lo que se seleccionó la técnica de búsqueda "Una Ramificación y Acotamiento Ingenuo" y la técnica "Una Mejor Ramificación y Acotamiento". Por otro lado la intranquilidad de saber que estas técnicas tenían un costo alto en tiempo computacional incitó el deseo de tener también técnicas con el tercer enfoque en las que sacrificando la exactitud fueran capaces de dar un valor aproximado adecuado en tiempos relativamente bajos, así se seleccionaron las técnicas de búsqueda aproximadas como son el "Dos Optimal", "Adaptación de Prim", "Híbrido Dos Optimal - Prim" y la innovadora técnica de Redes Neuronales usando la "Red Neuronal de Hopfield".

Como se mencionó en el Capítulo 2, el objetivo de la comparación de los algoritmos y análisis de resultados es meramente computacional, pero se realiza un análisis estadístico del comportamiento del software para reforzar el punto de vista computacional. Para obtener la muestra que requiere el análisis estadístico se hizo necesario correr el software para la solución del PAV y guardar en archivos los resultados experimentales como se muestra en el Apéndice 2. Estos muestreos requieren de ciertas instancias del PAV que son :

- 1) El Número de ciudades : 3, 4, 50, 100, etc.
- 2) Tipo PAV : Simétrico, Asimétrico o Geométrico.

Dentro de los diferentes tipos de PAV que existen (ver capítulo 2 donde se describen algunos de ellos) se seleccionaron estos tres para su solución, El Simétrico y Asimétrico por ser uno el contrario del otro y el Geométrico para poder plasmar la solución en forma gráfica en el plano cartesiano, no queriendo decir con ello que los anteriores no puedan ser graficados. Para la representación del problema PAV se hizo uso de matrices de adyacencia como estructura computacional. La razón de su uso es que en éstas se representan entre otros tipos

de grafos a los grafos completos (ver Capítulo 2). Dadas las características del PAV Simétrico y Geométrico la matriz de adyacencia, además de representar un grafo completo, representa grafos no dirigidos (ver Capítulo 1). Un problema PAV Geométrico puede ser un problema Simétrico pero no a la inversa, porque el PAV Geométrico parte de puntos en el espacio cartesiano, con los cuales se calculan las distancias. Mientras que el PAV Simétrico representa por si mismo las distancias entre las ciudades.

El PAV Asimétrico requiere de una matriz de adyacencia asimétrica porque representa además de un grafo completo a un grafo dirigido.

- 3) Límite inferior y Superior de los Números aleatorios : Se construyó un generador aleatorio de instancias del PAV tanto para el Simétrico, Asimétrico y Geométrico, por lo que se requiere de un límite inferior y superior para la generación de los Números aleatorios que representarán las distancias entre las ciudades y que se guardarán en la respectiva matriz de adyacencia.
- 4) Tipo de Solución : Se selecciona una técnica de solución de entre las que se implementaron están, "Métodos Exactos", "Métodos Aproximados" o "Todos los Métodos".

Dentro de los exactos a su vez puede seleccionarse el tipo de técnica de solución como puede ser "Búsqueda Exhaustiva Ingenua" (Naive Exhaustive-Search), "Ramificación y Acotamiento Ingenuo" (Naive Branch and Bound), Una mejor Ramificación y Acotamiento (A Better Branch and Bound).

En los métodos aproximados la selección está entre "Dos Optimal (2-Opt)", "Adaptación de Prim", "Híbrido Dos Optimal-Prim", y "Red Neuronal de Hopfield".

Cuando se selecciona la opción Todos los Métodos va a permitir guardar los resultados de la ejecución de todas las técnicas en un archivo, cuyo nombre proporciona el usuario. Es pertinente aclarar que las técnicas exactas seleccionadas fueron implementadas tanto para PAV Simétrico, Asimétrico y Geométrico, mientras que las aproximadas solo para PAV Simétrico y Geométrico por la naturaleza de los algoritmos.

Se describe la interfaz gráfica de este software en el Apéndice 1, donde se explica como se capturan las instancias del PAV y se dan ejemplos de las salidas de los mismos.

5.1 Comparación de los resultados de un Algoritmo Exacto contra Algoritmos Aproximados

La teoría nos dice que cuando nos encontramos con problemas computacionales NP-Completos una práctica de aproximación es relajar los requerimientos que un algoritmo produce en los resultados óptimos y que son satisfechos con una solución subóptima razonablemente cercana a la óptima. Tal relajación de la restricción óptima a menudo reduce el tiempo computacional de una función exponencial a una función polinomial. Se espera con esto que sea un sacrificio moderado en el costo de la solución subóptima [ARR96]. Se experimentará que tan congruente es esto último con respecto a la teoría, empleando regresiones polinomiales. El grado de exactitud del modelo con respecto a la variable dependiente se calculará con el estimador de R^2 (ver Capítulo 2) apoyándose de Excel de Microsoft.

5.1.1 Análisis de la Exactitud con respecto al número de ciudades

5.1.1.1 Factor de Garantía y Cociente de aproximación

Usando la métrica teórica estándar para medir la calidad de un algoritmo de aproximación, se calculó del Factor de Garantía r_A y el Cociente de aproximación C_A (ver capítulo 4). Esto se debe a que es necesario analizar que tanto se aproximan los algoritmos aproximados a su solución real, como se muestra en la tabla 5.1 a tabla 5.4. En estas tablas se toma a $OPT(I)$ que es el valor óptimo de la función objetivo en la instancia I como el valor exacto, que se obtiene del método Una Mejor Ramificación y Acotamiento (A Better Branch and Bound) por ser el más rápido de los métodos exactos implementados. $V(I,A(I))$ es el valor obtenido por cada uno de los algoritmos de aproximación al evaluar la instancia I en la función objetivo. La instancia I es el número de ciudades que en esta prueba es de {10, 12, 14, 16, 18, 20} ciudades. Realizando 3 muestreos para cada conjunto de instancias I (Prueba No. 3).

Resumen de 3 Pruebas para PAV Simétrico de 10 a 20 Ciudades de Factor de Garantía									
	No.Ciudades			No.Ciudades			No.Ciudades		
Prueba 03 Muestreo 1,2,3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
TipoPAVDistancia	10	10	10	12	12	12	14	14	14
A Better Branch and Bound	246	139	129	179	214	193	306	173	240
Dos Optimal (2-opt)	246	170	129	223	214	207	342	182	284
1) $V(I,A(I))/OPT(I)$	1	1.223	1	1.2458	1	1.0725	1.1176	1.052	1.1833
2) $OPT(I)/V(I,A(I))$	1	0.8176	1	0.8027	1	0.9324	0.8947	0.9505	0.8451
$CA = \min \{1,2\}$	1.0000	0.8176	1.0000	0.8027	1.0000	0.9324	0.8947	0.9505	0.8451

Resumen de 3 Pruebas para PAV Simétrico de 10 a 20 Ciudades de Factor de Garantía									
	No.Ciudades			No.Ciudades			No.Ciudades		
Prueba 03 Muestreo 1,2,3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
TipoPAVDistancia	16	16	16	18	18	18	20	20	20
A Better Branch and Bound	190	226	179	188	245	138	193	188	214
Dos Optimal (2-opt)	190	247	195	191	281	150	220	237	245
1) $V(I,A(I))/OPT(I)$	1	1.0929	1.0894	1.016	1.1469	1.087	1.1399	1.2606	1.1449
2) $OPT(I)/V(I,A(I))$	1	0.915	0.9179	0.9843	0.8719	0.92	0.8773	0.7932	0.8735
$CA = \min \{1,2\}$	1.0000	0.9150	0.9179	0.9843	0.8719	0.9200	0.8773	0.7932	0.8735

Tabla 5.1 Cociente de Aproximación de Dos-Optimal contra un método exacto

Resumen de 3 Pruebas para PAV Simétrico de 10 a 20 Ciudades de Factor de Garantía									
Prueba 03 Muestreo 1,2,3	No.Ciudades			No.Ciudades			No.Ciudades		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
TipoPAVDistancia	10	10	10	12	12	12	14	14	14
A Better Branch and Bound	246	139	129	179	214	193	306	173	240
Híbrido 2-Optimal-Prim	298	139	129	196	214	220	308	231	285
1) V(I,A(I))/OPT(I)	1.2114	1	1	1.095	1	1.1399	1.0065	1.3353	1.1875
2) OPT(I)/V(I,A(I))	0.8255	1	1	0.9133	1	0.8773	0.9935	0.7489	0.8421
CA = min {1,2}	0.8255	1.0000	1.0000	0.9133	1.0000	0.8773	0.9935	0.7489	0.8421

Resumen de 3 Pruebas para PAV Simétrico de 10 a 20 Ciudades de Factor de Garantía									
Prueba 03 Muestreo 1,2,3	No.Ciudades			No.Ciudades			No.Ciudades		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
TipoPAVDistancia	16	16	16	18	18	18	20	20	20
A Better Branch and Bound	190	226	179	188	245	138	193	188	214
Híbrido 2-Optimal-Prim	194	252	187	207	250	139	216	193	228
1) V(I,A(I))/OPT(I)	1.0211	1.115	1.0447	1.1011	1.0204	1.0072	1.1192	1.0266	1.0654
2) OPT(I)/V(I,A(I))	0.9794	0.8968	0.9572	0.9082	0.98	0.9928	0.8935	0.9741	0.9386
CA = min {1,2}	0.9794	0.8968	0.9572	0.9082	0.9800	0.9928	0.8935	0.9741	0.9386

Tabla 5.2 Cociente de Aproximación de Híbrido Dos-Optimal-Prim contra un método exacto

Resumen de 3 Pruebas para PAV Simétrico de 10 a 20 Ciudades de Factor de Garantía									
Prueba 03 Muestreo 1,2,3	No.Ciudades			No.Ciudades			No.Ciudades		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
TipoPAVDistancia	10	10	10	12	12	12	14	14	14
A Better Branch and Bound	246	139	129	179	214	193	306	173	240
Adaptación Prim	320	178	134	208	214	299	370	243	353
1) V(I,A(I))/OPT(I)	1.3008	1.2806	1.0388	1.162	1	1.5492	1.2092	1.4046	1.4708
2) OPT(I)/V(I,A(I))	0.7688	0.7809	0.9627	0.8606	1	0.6455	0.827	0.7119	0.6799
CA = min {1,2}	0.7688	0.7809	0.9627	0.8606	1.0000	0.6455	0.8270	0.7119	0.6799

Resumen de 3 Pruebas para PAV Simétrico de 10 a 20 Ciudades de Factor de Garantía									
Prueba 03 Muestreo 1,2,3	No.Ciudades			No.Ciudades			No.Ciudades		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
TipoPAVDistancia	16	16	16	18	18	18	20	20	20
A Better Branch and Bound	190	226	179	188	245	138	193	188	214
Adaptación Prim	194	383	296	326	429	164	272	256	271
1) V(I,A(I))/OPT(I)	1.0211	1.6947	1.6536	1.734	1.751	1.1884	1.4093	1.3617	1.2664
2) OPT(I)/V(I,A(I))	0.9794	0.5901	0.6047	0.5767	0.5711	0.8415	0.7096	0.7344	0.7897
CA = min {1,2}	0.9794	0.5901	0.6047	0.5767	0.5711	0.8415	0.7096	0.7344	0.7897

Tabla 5.3 Cociente de Aproximación de Adaptación Prim contra un método exacto

Resumen de 3 Pruebas para PAV Simétrico de 10 a 20 Ciudades de Factor de Garantía									
Prueba 03 Muestreo 1,2,3	No.Ciudades			No.Ciudades			No.Ciudades		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
TipoPAVDistancia	10	10	10	12	12	12	14	14	14
A Better Branch and Bound	246	139	129	179	214	193	306	173	240
Red Neuronal de Hopfield	388	381	484	320	568	422	957	750	703
1) V(I,A(I))/OPT(I)	1.5772	2.741	3.7519	1.7877	2.6542	2.1865	3.1275	4.3353	2.9292
2) OPT(I)/V(I,A(I))	0.634	0.3648	0.2665	0.5594	0.3768	0.4573	0.3197	0.2307	0.3414
CA = min {1,2}	0.6340	0.3648	0.2665	0.5594	0.3768	0.4573	0.3197	0.2307	0.3414

Resumen de 3 Pruebas para PAV Simétrico de 10 a 20 Ciudades de Factor de Garantía									
Prueba 03 Muestreo 1,2,3	No.Ciudades			No.Ciudades			No.Ciudades		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
TipoPAVDistancia	16	16	16	18	18	18	20	20	20
A Better Branch and Bound	190	226	179	188	245	138	193	188	214
Red Neuronal de Hopfield	624	986	731	969	766	858	868	527	1083
1) V(I,A(I))/OPT(I)	3.2842	4.3628	4.0838	5.1543	3.1265	6.2174	4.4974	2.8032	5.0607
2) OPT(I)/V(I,A(I))	0.3045	0.2292	0.2449	0.194	0.3198	0.1608	0.2224	0.3567	0.1976
CA = min {1,2}	0.3045	0.2292	0.2449	0.1940	0.3198	0.1608	0.2224	0.3567	0.1976

Tabla 5.4 Cociente de Aproximación de Red Neuronal de Hopfield contra un método exacto

Recordando de la teoría el C_A siempre es menor o igual a 1. Por lo que empíricamente puede decirse que las Tabla 5.1 a Tabla 5.4 muestran que el C_A al acercarse a 1 tienen un excelente Cociente de Aproximación lo que significa que la cercanía a la solución exacta es aceptable, esto ocurre tanto para el método Dos Optimal como para el Híbrido Dos Optimal-Prim. Adaptación Prim tiene el C_A mas bajo en 0.5711 y la Red Neuronal de Hopfield de 0.1608 siendo por lo tanto el C_A pobre para ambos métodos.

El Factor de Garantía r_A se calcula localizando el mínimo de los Cocientes de Aproximación para cada uno de los métodos como se muestra en la Tabla 5.5.

Factor de garantía con respecto A Better Branch and Bound		
	$r_A = \min \{C_A\}$	Prom CA
Dos Optimal (2-opt)	0.7932	0.9109
Adaptación Prim	0.5711	0.75746
Híbrido 2-Optimal-Prim	0.7489	0.92896
Red Neuronal de Hopfield	0.1608	0.32115

Tabla 5.5 Resumen Factor de Garantía (r_A) y Promedio del Cociente de Aproximación C_A

Del cálculo del factor de garantía r_A para 10, 12,...,20 ciudades, se puede concluir que Dos-Optimal e Híbrido Dos-Optimal-Prim tiene un factor de Garantía relativamente bueno, mientras que Adaptación Prim y la Red Neuronal de Hopfield tienen un factor de garantía paupérrimo. No así cuando se calculó el promedio del Cociente de Aproximación C_A que proporciona excelentes resultados para los tres primeros sugiriendo que la Red Neuronal de Hopfield debe estudiarse mas a fondo para mejorar este factor.

5.1.1.2 Análisis del Error Relativo Aproximado de la Exactitud de los métodos Aproximados

Según la teoría (Capítulo 1 Definición 11) una solución aproximada $S_A(I)$ es la solución que se obtiene de los métodos Aproximados, mientras que $S_p(I)$ es la solución exacta, en este caso del método más rápido de los implementados. Con estos datos puede obtenerse el Error Relativo Aproximado (ERA) que siempre estará acotado a un ϵ que es el error que se está dispuesto a permitir. Para realizar este análisis se hizo un muestreo de 18 problemas PAV Simétrico de 12, 14, ..., 20 ciudades, siendo 3 PAV de 12 ciudades, 3 PAV de 14, ..., 3 PAV de 20 ciudades, siendo este conjunto la Prueba No 3 que se aprecia en la tabla 5.6, y el ERA se encuentra en la tabla 5.7.

Resumen de 3 Pruebas para PAV Simétrico de 10 a 20 Ciudades									
TipoPAVDistancia	No.Ciudades			No.Ciudades			No.Ciudades		
	10	10	10	12	12	12	14	14	14
Prueba 03 Muestreo 1,2,3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
A Better Branch and Bound	246	139	129	179	214	193	306	173	240
Dos Optimal (2-opt)	246	170	129	223	214	207	342	182	284
Adaptación Prim	320	178	134	208	214	299	370	243	353
Híbrido 2-Optimal-Prim	298	139	129	196	214	220	308	231	285
Red Neuronal de Hopfield	388	381	484	320	568	422	957	750	703

Resumen de 3 Pruebas para PAV Simétrico de 10 a 20 Ciudades									
TipoPAVDistancia	No.Ciudades			No.Ciudades			No.Ciudades		
	16	16	16	18	18	18	20	20	20
Prueba 03 Muestreo 1,2,3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
A Better Branch and Bound	190	226	179	188	245	138	193	188	214
Dos Optimal (2-opt)	190	247	195	191	281	150	220	237	245
Adaptación Prim	194	383	296	326	429	164	272	256	271
Híbrido 2-Optimal-Prim	194	252	187	207	250	139	216	193	228
Red Neuronal de Hopfield	624	986	731	969	766	858	868	527	1083

Tabla 5.6 Resumen de la Prueba No. 3 Muestra de 18 diferentes problemas PAV Simétrico de 10 a 20 Ciudades

Resumen de 3 Pruebas para PAV Simétrico de 10 a 20 Ciudades del Error Relativo Aproximado con respecto A Better Branch and Bound

	No.Ciudades			No.Ciudades			No.Ciudades		
TipoPAV\ERA de Distancia	10	10	10	12	12	12	14	14	14
Prueba 03 Muestreo 1,2,3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Dos Optimal (2-opt)	0	0.223	0	0.2458	0	0.0725	0.1176	0.052	0.1833
Adaptación Prim	0.3008	0.2806	0.0388	0.1620	0.0000	0.5492	0.2092	0.4046	0.4708
Híbrido 2-Optimal-Prim	0.2114	0.0000	0.0000	0.0950	0.0000	0.1399	0.0065	0.3353	0.1875
Red Neuronal de Hopfield	0.5772	1.7410	2.7519	0.7877	1.6542	1.1865	2.1275	3.3353	1.9292

Resumen de 3 Pruebas para PAV Simétrico de 10 a 20 Ciudades del Error Relativo Aproximado con respecto A Better Branch and Bound

	No.Ciudades			No.Ciudades			No.Ciudades		
TipoPAV\ERA de Distancia	16	16	16	18	18	18	20	20	20
Prueba 03 Muestreo 1,2,3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Dos Optimal (2-opt)	0	0.0929	0.0894	0.016	0.1469	0.087	0.1399	0.2606	0.1449
Adaptación Prim	0.0211	0.6947	0.6536	0.7340	0.7510	0.1884	0.4093	0.3617	0.2664
Híbrido 2-Optimal-Prim	0.0211	0.1150	0.0447	0.1011	0.0204	0.0072	0.1192	0.0266	0.0654
Red Neuronal de Hopfield	2.2842	3.3628	3.0838	4.1543	2.1265	5.2174	3.4974	1.8032	4.0607

Tabla 5.7 Resumen del Error Relativo Aproximado de la Prueba No. 3

En general entre mas pequeño sea el ERA mejor será la exactitud del método. Puede notarse claramente que los ERA más pequeños y en ocasiones de cero se encuentran en los métodos Dos Optimal, Adaptación Prim e Híbrido Dos Optimal-Prim y los valores de ERA mas grandes en el método de la Red Neuronal de Hopfield. Lo cual indica que los tres primeros métodos pueden tomarse como una alternativa de solución. Y que el último debe mejorarse para que este ERA disminuya, cosa que se puede realizar al hacer cambio de parámetros en la Red Neuronal de Hopfield. En la tabla 5.8 se encuentran los promedios del ERA de todos los métodos.

TipoPAV\ERA de Distancia	
Prueba 03 Muestreo 1,2,3	Prom ERA
Dos Optimal (2-opt)	0.1040
Adaptación Prim	0.3609
Híbrido 2-Optimal-Prim	0.0831
Red Neuronal de Hopfield	2.5378

Tabla 5.8 Promedio del Error Relativo Aproximado de la Prueba No. 3

En esta tabla se aprecia que al híbridar el Método Dos-Opt con Adaptación Prim el promedio del ERA se reduce hasta 0.0831. Lo que permite sugerir que vale la pena híbridar métodos para poder obtener métodos que proporcionen mejores resultados en exactitud.

5.1.1.3 Análisis Gráfico de la Exactitud con respecto al Número de Ciudades

Se realizo la prueba No. 2 con 100 PAV Simétricos, divididos en 10 muestreos de {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} ciudades cada uno. Del primer muestreo se hizo una comparación en exactitud de la respuesta de la técnica de solución exacta Una Mejor

Ramificación y Acotamiento (A Better Branch and Bound); por ser el método exacto más rápido entre los que se implementaron, contra los métodos aproximados como se muestra en la siguiente tabla 5.9.

Resumen de Matrices Simétricas de 3-12 Ciudades										
Tipo PAV \ Distancia	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Exacto A Better Branch and Bound	143	124	38	280	139	139	232	196	189	189
Aproximado 2-Opt	143	124	38	280	139	139	238	196	189	217
Diferencia	0	0	0	0	0	0	6	0	0	28
Exacto A Better Branch and Bound	143	124	38	280	139	139	232	196	189	189
Aproximado Adaptación Prim	143	160	38	287	139	235	254	236	355	273
Diferencia	0	36	0	7	0	96	22	40	166	84
Exacto A Better Branch and Bound	143	124	38	280	139	139	232	196	189	189
Aprox. Hibr. 2-Optimal- Prim	143	124	38	280	139	139	232	196	204	218
Diferencia	0	0	0	0	0	0	0	0	15	29
Exacto A Better Branch and Bound	143	124	38	280	139	139	232	196	189	189
Aproximado Red Neuronal Hopfield	143	124	38	368	291	502	502	370	480	412
Diferencia	0	0	0	88	152	363	270	174	291	223

Tabla 5.9 Comparación en Exactitud de un método Exactos contra los Aproximados

En esta tabla puede apreciarse la distancia del método exacto a cada uno de los métodos aproximados, que es la diferencia entre el resultado exacto y el resultado aproximado. Se espera que la diferencia entre los métodos sea lo más cercana a cero, porque de esta forma el método aproximado es mas cercano al exacto. Como puede apreciarse la diferencia para algunos casos es de 0.

La diferencia en exactitud de algunos métodos aproximados es pequeño, por lo que en la práctica se sugiere trabajar con cualquiera de estos métodos aproximados, ya que el costo en tiempo no justifica la diferencia.

Se graficaron en diagrama de barras las diferencias en exactitud, para una mejor visualización, ver figuras 5.1 a figura 5.4.

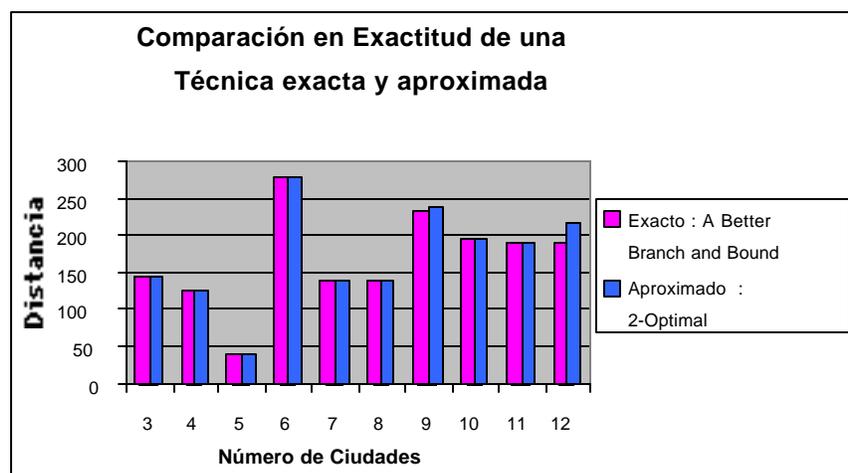


Figura 5.1 Gráfica de Barras de 2-Optimal

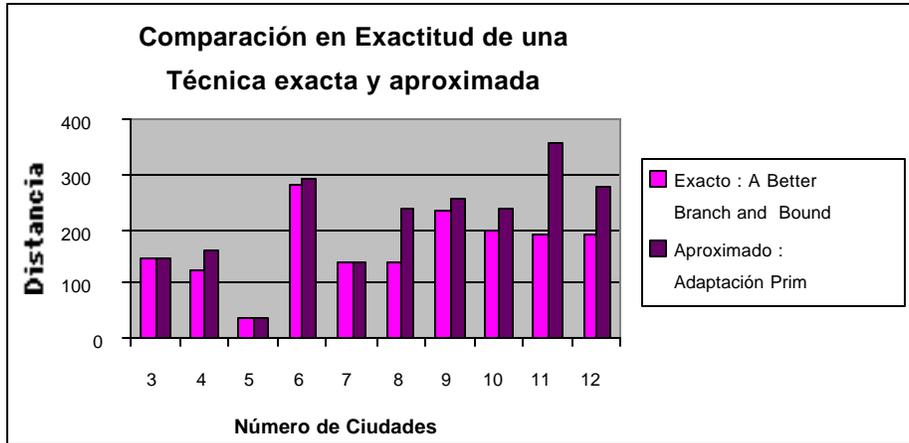


Figura 5.2 Gráfica de Barras de Adaptación Prim

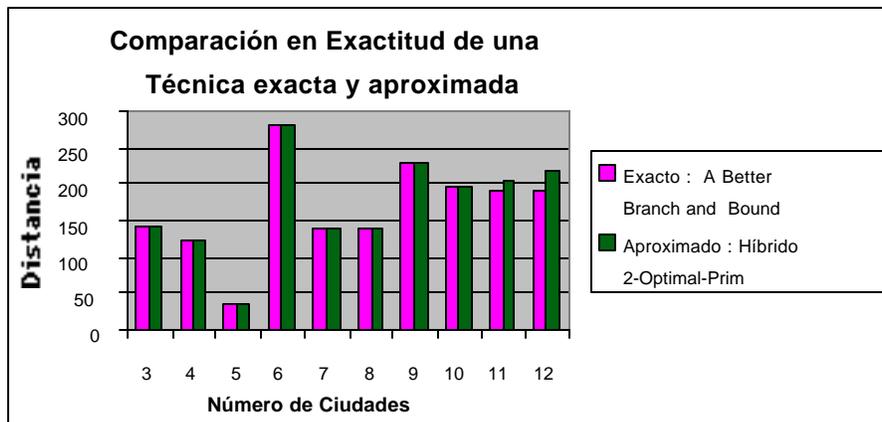


Figura 5.3 Gráfica de Barras de Híbrido Dos Optimal-Prim

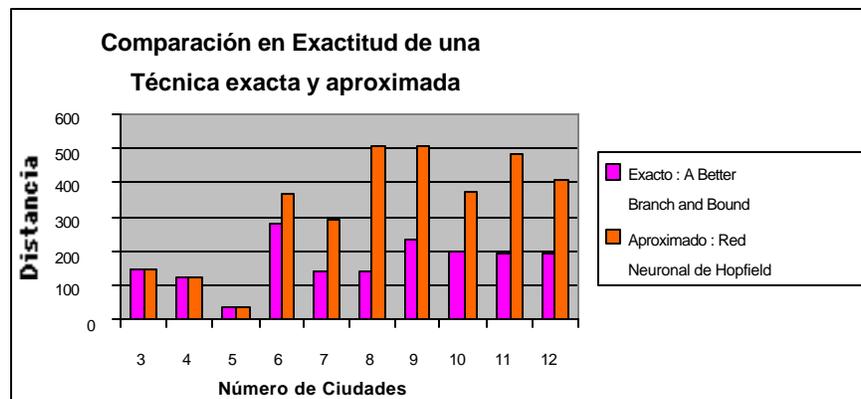


Figura 5.4 Gráfica de Barras de Red Neuronal de Hopfield

En las figuras de 5.1 a 5.4 se observa que, para la muestra de 10 problemas PAV tanto para el método Dos-Optimal como el Híbrido Dos Optimal-Prim, 8 problemas PAV dan resultados exactos y dos de ellos dan el resultado aproximado. En contraste con el método Adaptación de Prim y Redes Neuronales de Hopfield que de 10 problemas PAV solo 3 problemas PAV dan resultados exactos y 7 de ellos dan resultados aproximados.

Esto sugiere que los dos primeros tienden a tener una mejor aproximación que los dos últimos.

5.1.1.4 Análisis estadístico de la Exactitud de los métodos Aproximados

La prueba de bondad de ajuste nos proporciona una herramienta para probar si un grupo de datos se aproxima o semeja a una distribución conocida. En este caso se quiere comprobar que los datos arrojados por los métodos aproximados tienen un comportamiento estadísticamente semejante al del método exacto Una Mejor Ramificación y Acotamiento (A Better Branch and Bound). Esto permite asegurar que estos métodos aproximados son bastante cercanos a la realidad. La confiabilidad de estos métodos dependerá del valor alfa; que corresponde al grado de confiabilidad. El número de observaciones por prueba fue de 18, porque se corrieron 3 problemas PAV de 10, 12,..., 20 ciudades (Prueba No. 3). La Bondad de Ajuste se calcula con c_0^2 , por medio de la siguiente fórmula [HIM97] :

$$c_0^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Tomando a O_i como la frecuencia observada en el intervalo de la clase i ésimo es decir el valor aproximado (en este caso se trata de los métodos aproximados). E_i es la frecuencia esperada en el intervalo de clase i ésimo, es decir el valor del método exacto (A Better Branch and Bound). Este análisis se realizará de cada método aproximado contra el método exacto Una mejor Ramificación y Acotamiento (A Better Branch and Bound).

Resumen de 3 Pruebas para PAV Simétrico de 10 a 20 Ciudades de Bondad de Ajuste									
Entre 100	No.Ciudades			No.Ciudades			No.Ciudades		
TipoPAV\Distancia	10	10	10	12	12	12	14	14	14
Prueba 03 muestreo 1,2,3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
A Better Branch and Bound	2.46	1.39	1.29	1.79	2.14	1.93	3.06	1.73	2.4
Dos Optimal (2-opt)	2.46	1.7	1.29	2.23	2.14	2.07	3.42	1.82	2.84
Prueba estadística Bondad de Ajuste	0.0000	0.0691	0.0000	0.1082	0.0000	0.0102	0.0424	0.0047	0.0807

Resumen de 3 Pruebas para PAV Simétrico de 10 a 20 Ciudades de Bondad de Ajuste									
Entre 100	No.Ciudades			No.Ciudades			No.Ciudades		
TipoPAV\Distancia	16	16	16	18	18	18	20	20	20
Prueba 03 muestreo 1,2,3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
A Better Branch and Bound	1.9	2.26	1.79	1.88	2.45	1.38	1.93	1.88	2.14
Dos Optimal (2-opt)	1.9	2.47	1.95	1.91	2.81	1.5	2.2	2.37	2.45
Prueba estadística Bondad de Ajuste	0.0000	0.0195	0.0143	0.0005	0.0529	0.0104	0.0378	0.1277	0.0449

Tabla 5.10 Bondad de Ajuste de Dos Optimal contra un método exacto

Resumen de 3 Pruebas para PAV Simétrico de 10 a 20 Ciudades de Bondad de Ajuste									
Entre 100	No.Ciudades			No.Ciudades			No.Ciudades		
TipoPAV\Distancia	10	10	10	12	12	12	14	14	14
Prueba 03 muestreo 1,2,3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
A Better Branch and Bound	2.46	1.39	1.29	1.79	2.14	1.93	3.06	1.73	2.4
Adaptación Prim	3.20	1.78	1.34	2.08	2.14	2.99	3.70	2.43	3.53
Prueba estadística Bondad de Ajuste	0.2226	0.1094	0.0019	0.0470	0.0000	0.5822	0.1339	0.2832	0.5320

Resumen de 3 Pruebas para PAV Simétrico de 10 a 20 Ciudades de Bondad de Ajuste									
Entre 100	No.Ciudades			No.Ciudades			No.Ciudades		
TipoPAV\Distancia	16	16	16	18	18	18	20	20	20
Prueba 03 muestreo 1,2,3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
A Better Branch and Bound	1.9	2.26	1.79	1.88	2.45	1.38	1.93	1.88	2.14
Adaptación Prim	1.94	3.83	2.96	3.26	4.29	1.64	2.72	2.56	2.71
Prueba estadística Bondad de Ajuste	0.0008	1.0907	0.7647	1.0130	1.3819	0.0490	0.3234	0.2460	0.1518

Tabla 5.11 Bondad de Ajuste de Híbrido Dos Optimal-Prim contra un método exacto

Resumen de 3 Pruebas para PAV Simétrico de 10 a 20 Ciudades de Bondad de Ajuste									
Entre 100	No.Ciudades			No.Ciudades			No.Ciudades		
TipoPAV\Distancia	10	10	10	12	12	12	14	14	14
Prueba 03 muestreo 1,2,3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
A Better Branch and Bound	2.46	1.39	1.29	1.79	2.14	1.93	3.06	1.73	2.4
Híbrido 2-Optimal-Prim	2.98	1.39	1.29	1.96	2.14	2.20	3.08	2.31	2.85
Prueba estadística Bondad de Ajuste	0.1099	0.0000	0.0000	0.0161	0.0000	0.0378	0.0001	0.1945	0.0844

Resumen de 3 Pruebas para PAV Simétrico de 10 a 20 Ciudades de Bondad de Ajuste									
Entre 100	No.Ciudades			No.Ciudades			No.Ciudades		
TipoPAV\Distancia	16	16	16	18	18	18	20	20	20
Prueba 03 muestreo 1,2,3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
A Better Branch and Bound	1.9	2.26	1.79	1.88	2.45	1.38	1.93	1.88	2.14
Híbrido 2-Optimal-Prim	1.94	2.52	1.87	2.07	2.50	1.39	2.16	1.93	2.28
Prueba estadística Bondad de Ajuste	0.0008	0.0299	0.0036	0.0192	0.0010	0.0001	0.0274	0.0013	0.0092

Tabla 5.12 Bondad de Ajuste de Adaptación Prim contra un método exacto

Resumen de 3 Pruebas para PAV Simétrico de 10 a 20 Ciudades de Bondad de Ajuste									
Entre 100	No.Ciudades			No.Ciudades			No.Ciudades		
TipoPAV\Distancia	10	10	10	12	12	12	14	14	14
Prueba 03 muestreo 1,2,3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
A Better Branch and Bound	2.46	1.39	1.29	1.79	2.14	1.93	3.06	1.73	2.4
Red Neuronal de Hopfield	3.88	3.81	4.84	3.20	5.68	4.22	9.57	7.50	7.03
Prueba estadística Bondad de Ajuste	0.8197	4.2132	9.7694	1.1107	5.8559	2.7172	13.8497	19.2445	8.9320

Resumen de 3 Pruebas para PAV Simétrico de 10 a 20 Ciudades de Bondad de Ajuste						
Entre 100	No.Ciudades			No.Ciudades		
TipoPAV\Distancia	16	16	16	18	18	18
Prueba 03 muestreo 1,2,3	1	2	3	1	2	3
A Better Branch and Bound	1.9	2.26	1.79	1.88	2.45	1.38
Red Neuronal de Hopfield	6.24	9.86	7.31	9.69	7.66	8.58
Prueba estadística Bondad de Ajuste	9.9135	25.5575	17.0226	32.4447	11.0792	37.5652

Resumen de 3 Pruebas para PAV Simétrico de 10 a 20 Ciudades de Bondad de Ajuste			
Entre 100	No.Ciudades		
TipoPAV\Distancia	20	20	20
Prueba 03 muestreo 1,2,3	1	2	3
A Better Branch and Bound	1.93	1.88	2.14
Red Neuronal de Hopfield	8.68	5.27	10.83
Prueba estadística Bondad de Ajuste	23.6075	6.1128	35.2879

Tabla 5.13 Bondad de Ajuste de Red Neuronal de Hopfield contra un método exacto

En las tabla de 5.10 a 5.13 se presenta el resultado de la Bondad de Ajuste. Aclarando que los datos originales fueron divididos entre 100. Esto permite facilidad en los cálculos de la Bondad de ajuste sin pérdida de generalidad. Se hará como ejemplo la bondad de ajuste de 2-Opt para ejemplificar como se realiza y el resto se resumen mas tarde.

Se calculan los grados de libertad (g.l.). Las muestra totales (k) son las 18 muestras de los 3 submuestros de 10 a 20 ciudades cada uno. En este estudio en particular, el valor de p es de 0 porque no hay parámetros estimados, ya que los datos exactos se obtienen mediante las corridas del software y no por estimación. Por lo que al calcular g.l. queda :

$$g.l. = k - p - 1 = 18 - 0 - 1 = 17$$

Estos 17 g.l. serán para todos los métodos aproximados. Se procede a calcular ahora a c_0^2 :

$$c_0^2 = \frac{(2.46 - 2.46)^2}{2.46} + \frac{(1.7 - 1.39)^2}{1.39} + \frac{(1.29 - 1.29)^2}{1.29} + \frac{(2.23 - 1.79)^2}{1.79} + \frac{(2.14 - 2.14)^2}{2.14} + \frac{(2.07 - 1.93)^2}{1.93} + \frac{(3.42 - 3.06)^2}{3.06} + \frac{(1.82 - 1.73)^2}{1.73} + \frac{(2.84 - 2.4)^2}{2.4} + \frac{(1.9 - 1.9)^2}{1.9} + \frac{(2.47 - 2.26)^2}{2.26} + \frac{(1.95 - 1.79)^2}{1.79} + \frac{(1.91 - 1.88)^2}{1.88} + \frac{(2.81 - 2.45)^2}{2.45} + \frac{(1.5 - 1.38)^2}{1.38} + \frac{(2.2 - 1.93)^2}{1.93} + \frac{(2.37 - 1.88)^2}{1.88} + \frac{(2.45 - 2.14)^2}{2.14}$$

$$c_0^2 = 0.6232$$

En el Apéndice de [HIM97] página 777 se encuentra la Tabla III de Puntos porcentuales de la distribución χ^2_0 donde se lee en la fila $v = g.l. = 17$ y se busca el $c_0^2 = 0.6232$. Encontrando que la tabla reporta con 17 g. l. un valor mínimo de 5.7 con un $\alpha = 0.995$. Esto equivale a decir que se tiene más de un 99.5% de certeza de que los valores aproximados se comportan como los reales. Haciendo lo mismo para los otros tres métodos se tienen los siguientes resultados :

Prueba estadística Bondad de Ajuste	Probabilidad de certeza	
	ji cuadrada	Grado de Confiabilidad
Dos Optimal (2-opt)	0.6232	Mayor de 99.5 %
Adaptación Prim	6.9335	Entre 99% y 97.5%
Híbrido 2-Optimal-Prim	0.5353	Mayor de 99.5 %
Red Neuronal de Hopfield	265.1031698	Menor de 5%

Tabla 5.14 c_0^2 contra Grado de Confiabilidad

Estos resultados pueden interpretarse de la siguiente forma :

Dos Optimal : No se puede rechazar la hipótesis por lo que se dice que tienen una misma distribución con un grado de confianza mayor de 99.5 % y un riesgo menor de 0.5 %.

Adaptación Prim No se puede rechazar la hipótesis por lo que se dice que tienen una misma distribución con un grado de confianza entre 99.5 % y 97.5% y un riesgo entre 0.5 % y 2.5 %.

Híbrido 2-Optimal No se puede rechazar la hipótesis por lo que se dice que tienen una misma distribución con un grado de confianza mayor de 99.5 % y un riesgo menor de 0.5 %.

Red Neuronal de Hopfield Se rechaza la hipótesis y se afirma que no tienen la misma distribución por tener un grado de confianza menor de 5%.

Computacionalmente hablando significa que los tres primeros pueden usarse con la confianza de que la exactitud de la respuesta es buena. Con respecto a la Red Neuronal de Hopfield, debe mejorarse la red para que se mejore en exactitud a pesar de que ahora se mejoro al dar siempre rutas válidas.

5.1.1.1.5 Análisis del Tiempo de Ejecución con respecto al Número de Ciudades

Cuando se generó la Prueba No. 1 con 10 matrices de adyacencia de 10 problemas diferentes del PAV Simétrico de 3 a 12 Ciudades, se corrieron tanto con las técnicas exactas como con las aproximadas con el objeto de hacer una mejor comparación. Así, el conjunto de instancias de la prueba No. 1 de los métodos aproximados se resume en la siguiente tabla. Donde estos datos se graficaron en 3D solo para que se aprecie mejor su comportamiento, como se muestra a continuación.

Resumen de Matrices Simétricas de 3 a 12 Ciudades de Métodos Aproximados										
TipoPAV\Tiempo (miliseg)	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2-Optimal	1	0	1	1	1	1	2	3	4	6
Adaptación Prim	2	0	1	1	1	0	0	0	1	1
Híbrido 2-Optimal-Prim	0	0	0	1	1	1	1	1	4	2
Red Neuronal de Hopfield	67	152	90	997	7451	721	15227	20541	27017	34816

Tabla 5.15 Muestra del PAV Simétrico de 3 a 12 Ciudades usando Métodos Aproximados

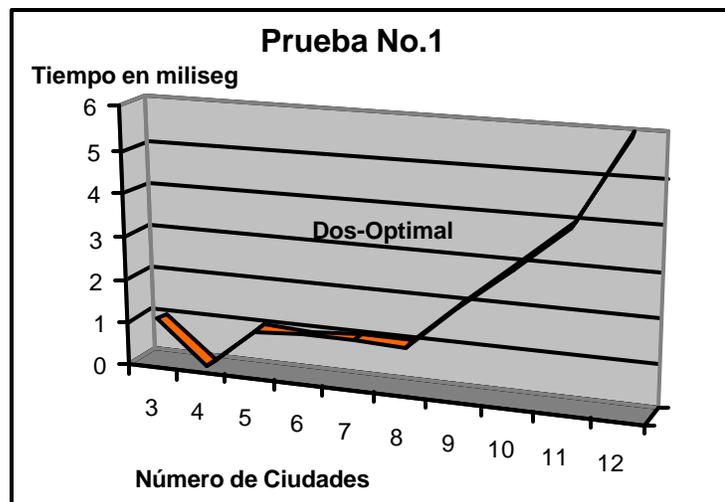


Figura 5.5 Prueba No. 1 Búsqueda 2-Opt en 3D

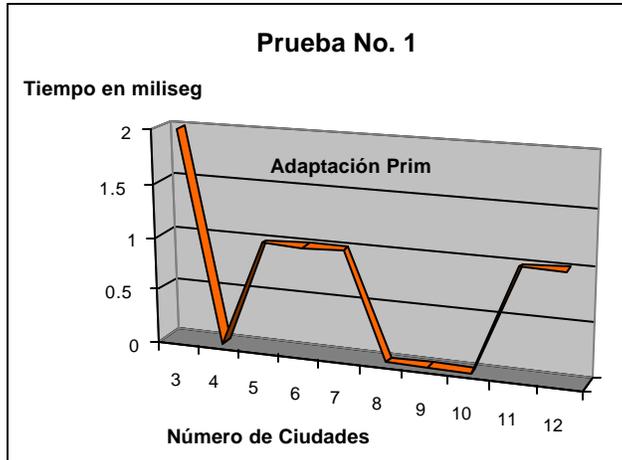


Figura 5.6 Prueba No. 1 Búsqueda Adaptación de Prim en 3D

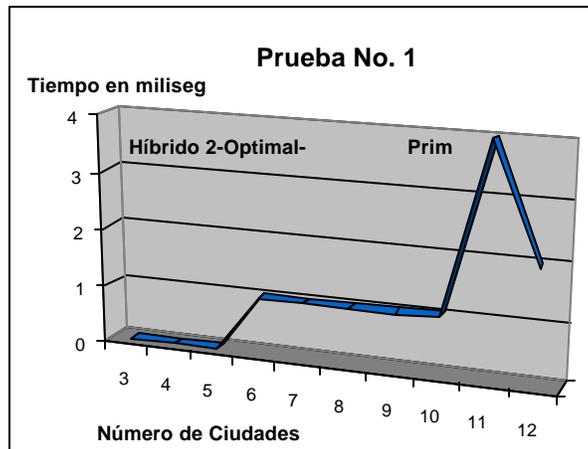


Figura 5.7 Prueba No. 1 Búsqueda Híbrido Dos Optimal-Prim en 3D

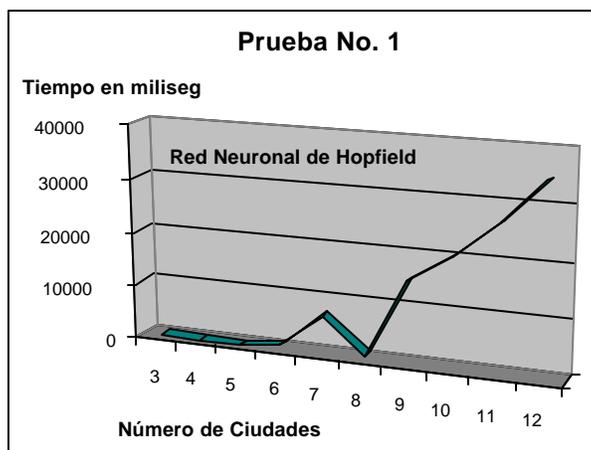


Figura 5.8 Prueba No. 1 Búsqueda Red Neuronal de Hopfield en 3D

Con estos mismos datos se obtiene la regresión para cada uno de los métodos.

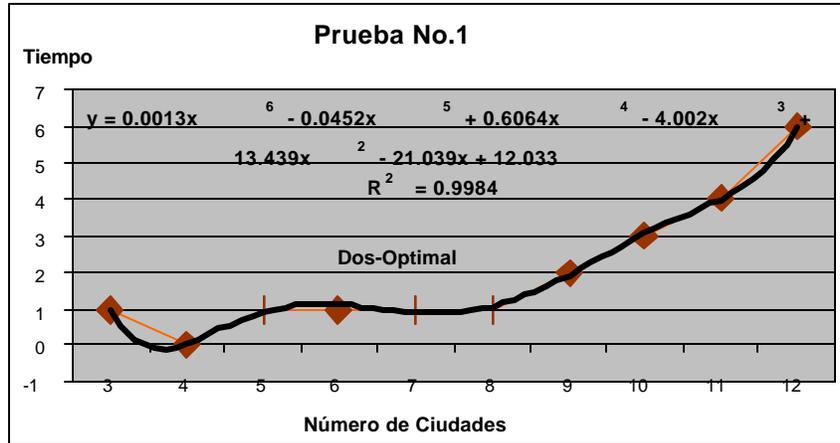


Figura 5.9 Búsqueda 2-Opt con regresión polinomial y n = 6

Esta gráfica muestra una curva a la que se le calculó la regresión polinomial, con un orden de 6 (Figura 5.9). Este orden aunque nos proporciona una excelente regresión dado que tenemos una $R^2 = 0.9984$ que es casi de 1 e indica que los datos muestreados pueden ser representados por un polinomio de grado 6, en la práctica no es muy conveniente este orden por el tiempo que requiere su cálculo.

Según la teoría en cada etapa del 2-Opt tiene una complejidad de $O(n^2)$. La pregunta es ¿Cuántas de estas etapas son requeridas para encontrar la ruta 2-Optimal? Esto es lo difícil y se cree que este número de etapas es polinomial y es un problema abierto [e-mail1], [e-mail2], [e-mail3]. Por lo que se hará otra prueba con orden 3.

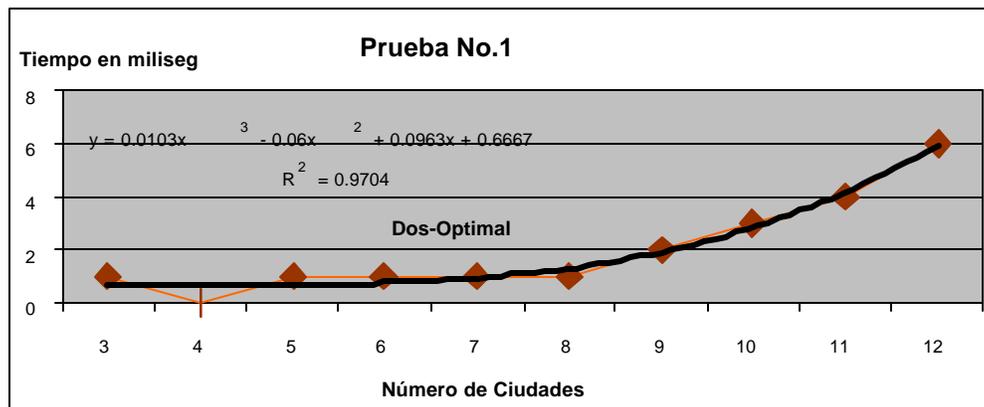


Figura 5.10 Regresión Polinomial con n=3 para Dos-Opt

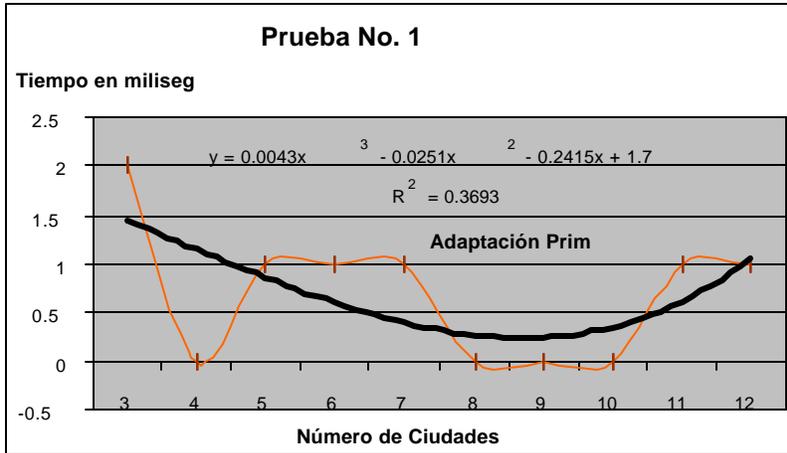


Figura 5.11 Regresión Polinomial con n=3 para Adaptación Prim

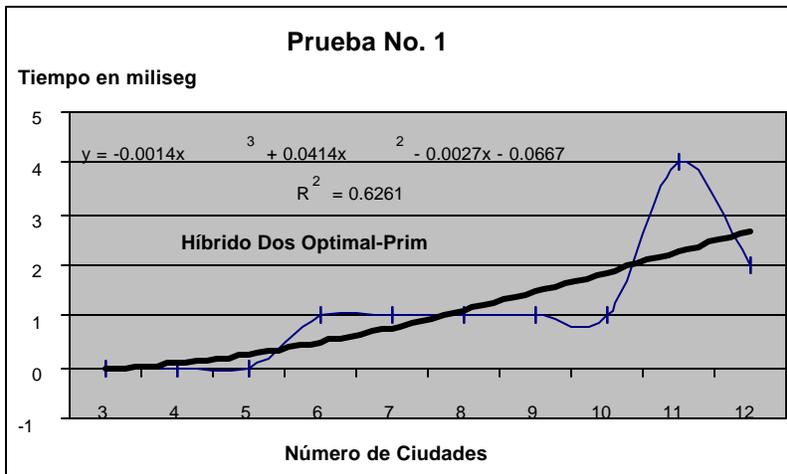


Figura 5.12 Regresión Polinomial con n=3 para Híbrido Dos Optimal-Prim

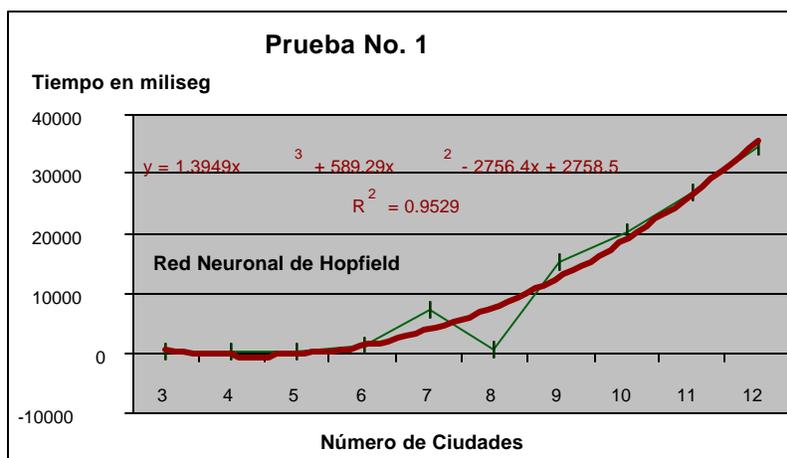


Figura 5.13 Regresión Polinomial con n=3 para la Red Neuronal de Hopfield

Los resultados de las regresiones afirman el comportamiento polinomial de los métodos aproximados. Dos-Optimal y la Red Neuronal de Hopfield con R^2 cercanas a 1. En contraste el método Adaptación de Prim con R^2 de 0.3693 es muy baja porque es una adaptación para la solución del PAV. Es decir, proviene del método Prim que no fue diseñado para el problema PAV. Sin embargo como se verá más adelante los resultados en exactitud son favorables. Lo mismo ocurre con el Híbrido Dos Optimal-Prim con una R^2 de 0.6261 que también es baja porque tiene como ruta inicial la ruta que deja Adaptación de Prim. Sin embargo como se verá más adelante los resultados en exactitud son favorables. Al graficar estos datos se obtiene información interesante.

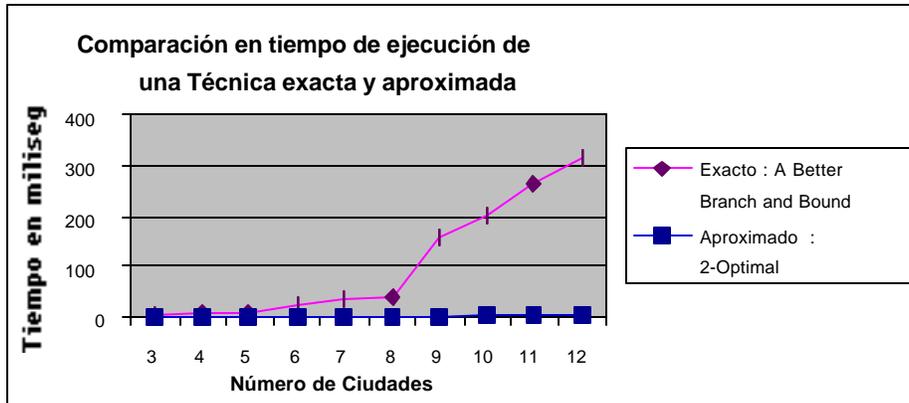


Figura 5.14 2-Optimal contra Exacto en Tiempo de Ejecución

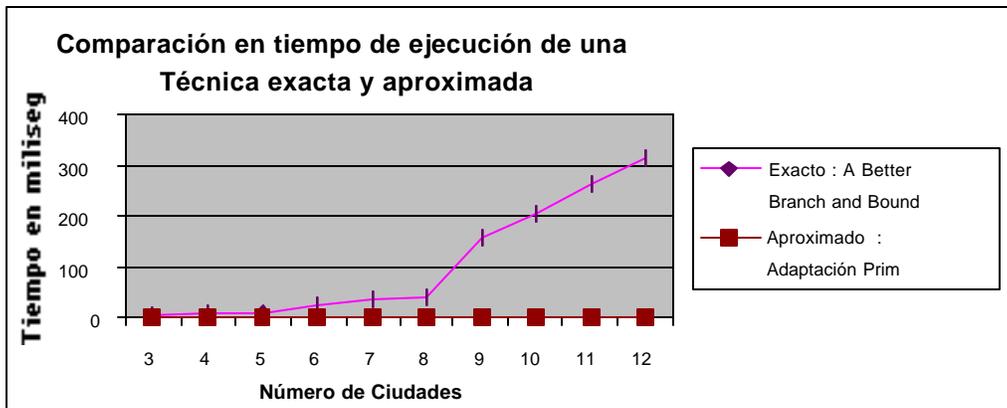


Figura 5.15 Adaptación de Prim contra Exacto en Tiempo de Ejecución

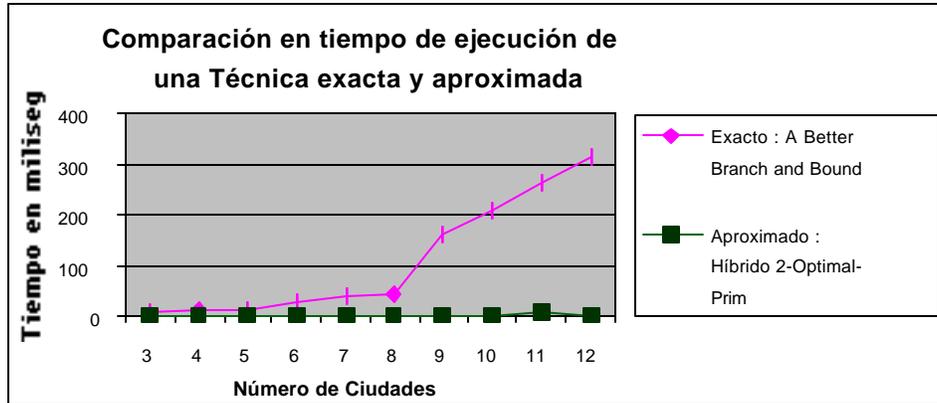


Figura 5.16 Híbrido Dos Optimal-Prim contra Exacto en Tiempo de Ejecución

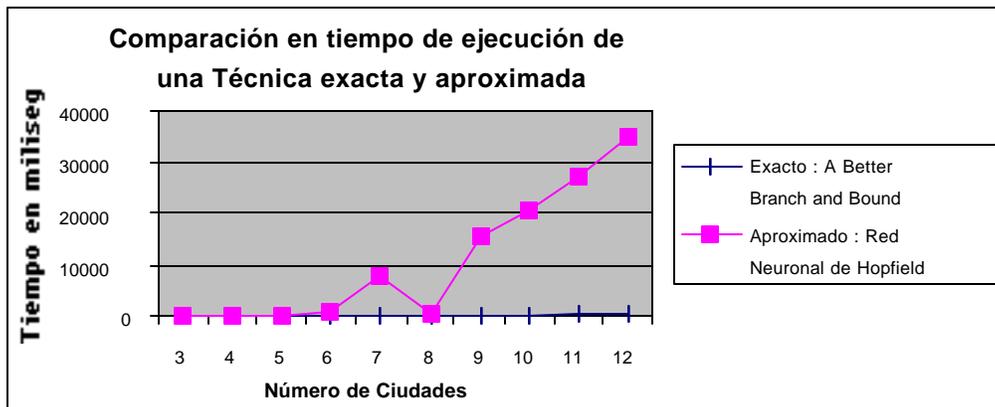


Figura 5.17 Red Neuronal de Hopfield contra Exacto en Tiempo de Ejecución

De la figura 5.14 a 5.17 sugieren la utilización de diferentes tipos de técnicas de solución dependiendo del número de ciudades. Para pocas ciudades (hasta antes de 8) es posible (ya que se trata de miliseg) utilizar métodos exactos dado que el tiempo de respuesta es relativamente pequeño y tiene como ventaja sobre un aproximado que la solución es la exacta. Y con un crecimiento mayor de 10 en el número de las ciudades la diferencia en tiempo aumenta por lo que son mejores los métodos aproximados. Cabe señalar que siempre la curva de los aproximados (a excepción de la Red Neuronal de Hopfield) se prolonga por abajo de la curva de un método exacto, significando que el tiempo de respuesta será menor que la respuesta de una técnica exacta, aunque en algún momento la respuesta será aproximada. La Red Neuronal de Hopfield requiere de tiempos mayores del resto de los aproximados; pero, en este punto cabe aclarar que la red Neuronal de Hopfield se corrió con los parámetros default de Hopfield por facilidad en el muestreo. Pueden mejorarse los resultados en exactitud y tiempo si se juega con los parámetros, es decir se pueden variar los parámetros iniciales de la red a otros diferentes de los default de Hopfield.

Además debe tomarse en cuenta que la bondad del método de la Red de Hopfield sobre el resto de los métodos aproximados es que estos usan siempre una ruta inicial la

cual mejoran. La Red Neuronal de Hopfield por el contrario parte de cero, es decir sin ruta alguna, sin embargo encuentra siempre una ruta válida.

5.2 Comparación de los resultados de los Algoritmo Exactos

Los algoritmos exactos que se compararán son: Búsqueda Exhaustiva Ingenua (Naive Exhaustive Search), Ramificación y Acotamiento Ingenuo (Naive Branch and Bound) y Una Mejor Ramificación y Acotamiento (A Better Branch and Bound). Y a sabiendas de que los algoritmos exactos tienen un comportamiento exponencial (en el peor de los casos), se usará la teoría de interpolación para visualizar y apoyar que los resultados obtenidos al correr el software implementado tienen un comportamiento congruente y consistente con la teoría.

5.2.1 Análisis del Tiempo de Ejecución con respecto al Número de Ciudades

El muestreo de instancias de 10 problemas de 3 a 12 Ciudades para el PAV Simétrico se resume en la tabla 5.16. Y con esos datos se realizaron sus respectivas gráficas (Prueba No. 1) :

Resumen de Matrices Simétricas de 3-12 Ciudades de Métodos Exactos										
TipoPAVmiliseq	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Búsqueda Exhaustiva Ingenua	2	2	7	39	274	2326	21555	219654	2475818	30972070
Branch and Bound Ingenuo	1	2	4	29	49	215	1478	4615	15106	78880
A Better Branch and Bound	7	9	8	25	37	41	158	203	264	314

Tabla 5.16 Muestra del PAV Simétrico de 3 a 12 Ciudades usando Métodos Exactos

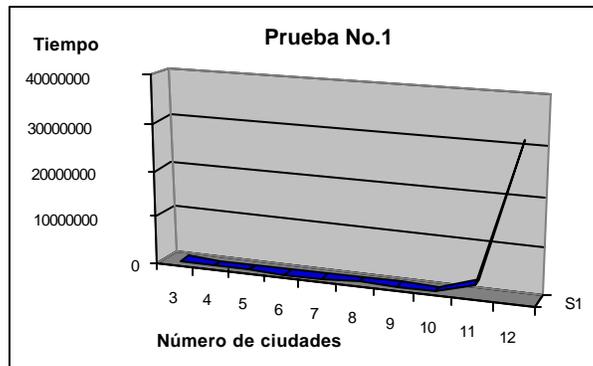


Figura 5.18 Prueba No. 1 Búsqueda Exhaustiva Ingenua en 3D

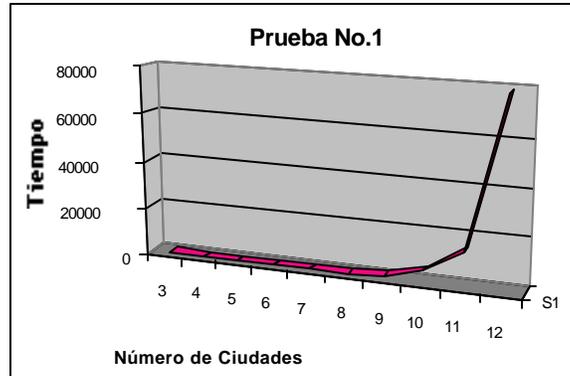


Figura 5.19 Prueba No. 1 Búsqueda Ramificación y Acotamiento Ingenuo en 3D

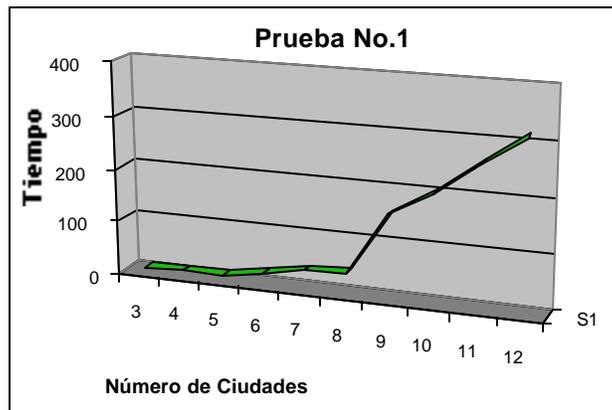


Figura 5.20 Prueba No. 1 Búsqueda Una Mejor Ramificación y Acotamiento en 3D

Estas gráficas nos muestran curvas interesantes, al observarlas es congruente que la distribución del tiempo con respecto al número de ciudades se comporta en forma exponencial lo cual permite interaccionar en forma coherente entre los resultados arrojados por el software que hace un modelado de la interpolación y la teoría de algoritmos. Pero además se puntualiza que en general el más rápido en dar la solución al PAV es el método Una Mejor Ramificación y Acotamiento (A Better Branch and Bound). A pesar de que para un número de ciudades de 3-5 reporta que se tarda más que los otros dos. Esto se debe al tipo de estructuras que se emplean en la implementación.

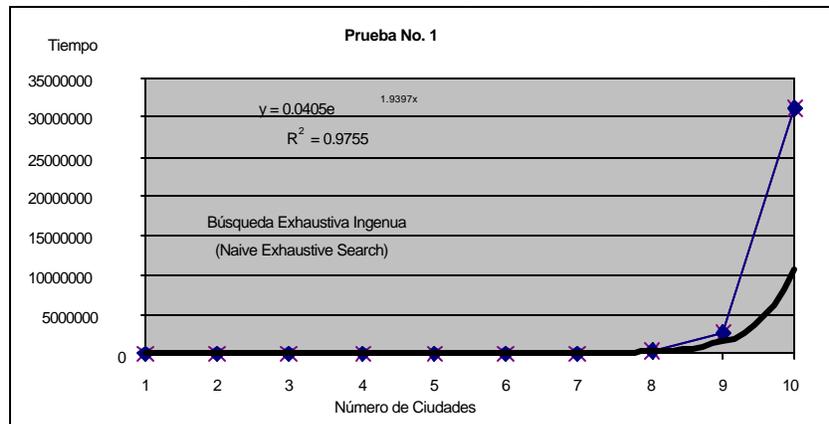


Figura 5.21 Búsqueda Exhaustiva Ingenua con regresión exponencial

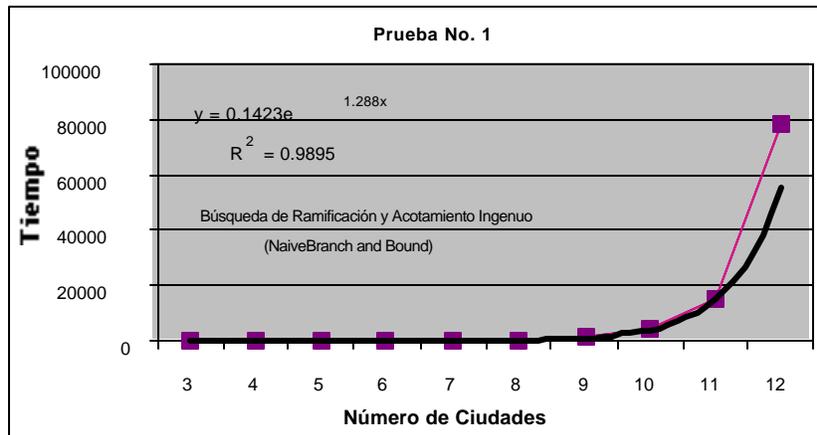


Figura 5.22 Búsqueda Ramificación y Acotamiento Ingenuo con regresión exponencial

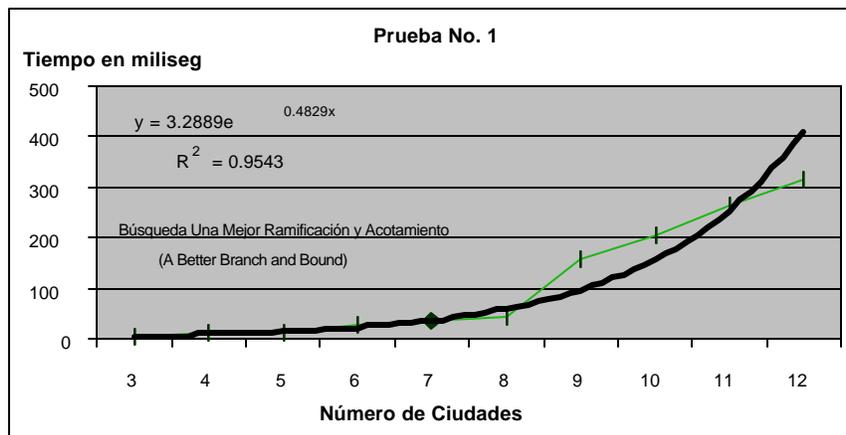


Figura 5.23 Búsqueda Una Mejor Ramificación y Acotamiento con regresión exponencial

El resultado de las regresiones muestran las ecuaciones exponenciales, que permiten estimar el tiempo que se requiere para resolver el PAV para cualquier número de ciudades, usando cualquiera de las técnicas de solución exacta implementadas. La ecuación de regresión para el método de Búsqueda Exhaustiva Ingenua es la siguiente :

$$y = 0.0405e^{1.9397x}$$

¹esta ecuación tiene una $R^2 = 0.9755$.

El resultado de la regresión para el método de Ramificación y Acotamiento Ingenuo proporciona la siguiente ecuación :

$$y = 0.1423e^{1.288x}$$

con una R^2 de **0.9895**.

¹ Recordando que R^2 nos proporciona un estimador de la exactitud de la regresión, y que entre mas cerca se encuentre de 1.0 mas exacta es.

²La misma operación se realizó para el método de Una Mejor Ramificación y Acotamiento dando la siguiente ecuación de regresión :

$$y = 3.2889e^{0.4829x}$$

esta ecuación tiene una $R^2 = 0.9543$.

El estimador de exactitud de la regresión R^2 en estos casos es mayor a 0.95 por lo que puede decirse que se tienen regresiones muy buenas ya que se acercan a 1.

Dado que las regresiones realizadas de los métodos exactos son buenas, se puede deducir empíricamente que el software tiene un comportamiento exponencial. Se puntualiza que empíricamente porque no se hizo un estudio formal para localizar un problema PAV que se comportara como "el peor de los casos".

5.2.2 Alisamiento de la curva del método Una Mejor Ramificiación y Acotamiento (A Better Branch and Bound)

Como puede apreciarse en la figura 5.23 la curva presenta un pico, la preocupación de esta desviación es que pudiese tratarse de un PAV que resultó ser más difícil o más fácil de resolver, o una discrepancia del software. Por lo que nace la inquietud de alisar el comportamiento de la curva. Esto se logra sacando un muestreo mayor, por lo que se generó otro conjunto de muestras (Prueba 2), que consiste en 100 instancias del PAV, en 10 subconjuntos de muestreo, cada uno de ellos conteniendo 10 problemas PAV desde 3 a 12 ciudades. Una vez tomada la muestra se sacó el promedio en tiempo, como se muestra en la siguiente tabla.

	No.Ciudades					
TipoPAV\miliseg	3	4	5	6	7	8
Búsqueda Exhaustiva Ingenua	1.9	1.8	6.9	39.3	277.8	2330.5
Ramificación y Acotamiento Ingenuo	0.9	1.4	4.8	21.3	84.2	416.8
Una Mejor Ramificación y Acotamiento	7.2	5.7	9.6	22.2	49.5	61

	No.Ciudades			
TipoPAV\miliseg	9	10	11	12
Búsqueda Exhaustiva Ingenua	21445.4	218941.3	2458521.6	30691030.7
Ramificación y Acotamiento Ingenuo	1280.4	8817.8	16203.5	69992.3
Una Mejor Ramificación y Acotamiento	93.7	198.5	218.6	390.1

Tabla 5.17 Promedio de la Prueba No. 2 con una Muestra de 100 diferentes problemas PAV Simétrico de 3 a 12 Ciudades

² Es necesario aclarar que, estos datos fueron obtenidos mediante regresiones exponenciales en el paquete Excel de Microsoft. El cual proporcionó junto con la gráfica la ecuación exponencial y el valor de R^2 .

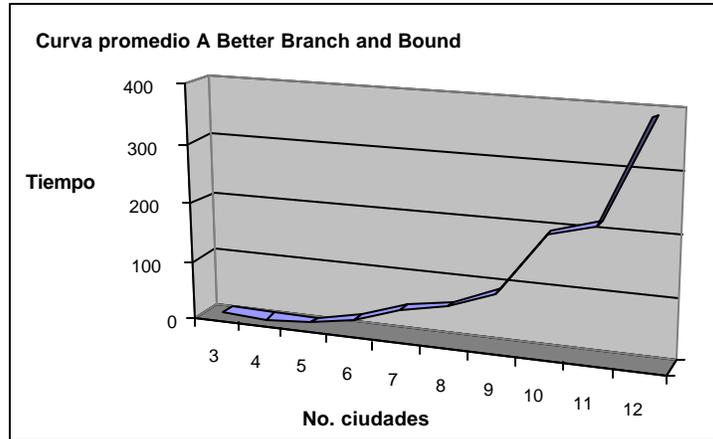


Figura 5.24 Curva promedio de A Better Branch and Bound en 3D

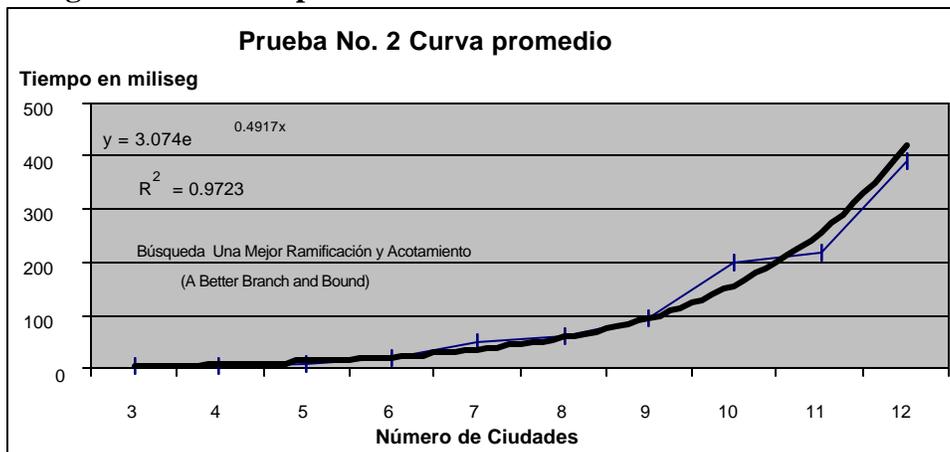


Figura 5.25 Curva promedio de A Better Branch and Bound con regresión exponencial

Tanto la gráfica 5.24 como la 5.25 representan el alisamiento de la curva de la figura 5.23 que tenía una $R^2 = 0.9543$ y al hacer el promedio en tiempo se obtuvo una $R^2 = 0.9723$, lo que significa que mejoró la aproximación a pesar de esas pequeñas desviaciones en la curva. Dado que mejoró el resultado de esta regresión se cree que la desviación de la curva (pico), no se debe a un mal funcionamiento del software. Esto puede ser originado al formarse aleatoriamente matrices de adyacencia más complejas unas que otras. Es decir en las fáciles la solución se encuentra en la parte mas a la izquierda del árbol de búsqueda lo que implica que el tiempo de solución es menor, mientras que las difíciles se encuentran en la parte derecha del árbol de búsqueda implicando un tiempo de solución mayor. No pudiendo asegurar que en algún momento alguna de las matrices difíciles sea "el peor de los casos".

5.3 PAV Geométricos y Asimétricos

Dado que los PAV Geométricos se comportan como Simétricos desde el momento que ya tienen una matriz de adyacencia de distancias, su solución es similar por lo que su comportamiento en el estudio empírico puede decirse que es semejante. Por esta razón no se realizó prueba alguna. Con respecto a los PAV Asimétricos no se

implementaron métodos aproximados para este tipo de problemas, por lo que la comparación con los Simétricos y Geométricos no sería justa y es la razón para no realizar el estudio de su comportamiento.