CAPÍTULO 2

Métodos de solución

Dada la dificultad práctica para resolver de forma exacta toda una serie de problemas de programación entera, se han desarrollado algoritmos que proporcionan soluciones factibles (es decir, que satisfacen las restricciones del problema), las cuales, auque no proporcionen soluciones óptimas, al menos se acercan al valor óptimo con un esfuerzo computacional razonable. Estas soluciones se podrían llamar "satisfactorias" en lugar de óptimas, ya que son lo suficientemente buenas en muchos casos de aplicación práctica.

Este tipo de algoritmos se denominan heurísticos, y son procedimientos simples (a menudo basados en el sentido común), que ofrecen una buena solución (no necesariamente la solución óptima) para problemas difíciles [20].

El diseño de algoritmos heurísticos suele no resultar complejo, ofrecen más de una solución y son más fáciles de entender. A menudo tratan de aprovechar la estructura del problema para obtener soluciones de buena calidad en un tiempo razonable.

Por el contrario, un inconveniente de los métodos heurísticos es que no es posible conocer la calidad de la solución (cuán cerca está del óptimo). Afortunadamente existen métodos para obtener cotas que proporcionen una orientación respecto a la calidad de la solución obtenida. Estos procedimientos se basan en relajaciones del problema original. La relajación se puede hacer, ya sea eliminando algunas de las restricciones, efectuando un procedimiento de ramificación y acotamiento truncado, o bien efectuando una relajación Lagrangeana.

La relajación Lagrangeana (LR) ha sido comúnmente usada con el propósito de proporcionar cotas duales para problemas de optimización. Asimismo, proveen información para obtener cotas primalas. Esto significa que en los casos donde la relajación Lagrangeana es posible, se puede obtener una solución factible de calidad con un heurístico, y se puede reducir el esfuerzo computacional requerido. En este capítulo se utilizará la notación mostrada en la tabla 2.1.

Notación	Significado
(P)	Problema de optimización.
FS(P)	Conjunto de soluciones factibles del problema (P).
v(P)	Valor óptimo de problema (P).
u^k, s^k, **etc.**	Valor de *u, s,* etc., usado en la iteración *k.*
x^T	Transpuesta de *x*
x^k	El k-ésimo punto extremo de algún poliedro.
$x^{(k)}$	Solución encontrada en la iteración *k.*
co(X)	Envolvente convexa del conjunto X
RP(P)	Relajación del problema (P).

Tabla 2.1 Notación Utilizada

2.1 Relajación de los problemas de optimización.

- **Problema de minimización.**

Definición 2.1. El problema (RP_{min}): $min\{g(x)|x\in W\}$ es una relajación del problema (P_{min}):$min\{f(x)|x\in V\}$, con la misma variable de decisión *x*, si y sólo si:

(i) El conjunto factible de (RP_{min}) contiene al conjunto factible de (P_{min}) (esto es $W\supseteq V$).

(ii) Sobre el conjunto factible de (P_{min}), el valor de la función objetivo de (RP_{min}) domina (es mejor o igual) al valor de la función objetivo de (P_{min}), es decir, $\forall x\in V,\ g(x)\leq f(x)$.

En el problema de minimización, $v(RP_{min})\leq v(P_{min})$, en donde (RP_{min}) es una versión optimista de (P_{min}), ya que tiene más soluciones factibles que (P_{min}).

- **Problema de maximización.**

Definición 2.2. El problema (RP_{max}):$max\{g(x)|x\in W\}$ es la relajación del problema (P_{max}):$max\{f(x)|x\in V\}$, con la misma variable de decisión *x*, si y sólo si:

(i) El conjunto factible de (RP_{max}) contiene al conjunto factible de (P_{max}) (esto es $W\supseteq V$).

(ii) Sobre el conjunto factible de (P_{max}), el valor de la función objetivo de (RP_{max}) domina (es mejor o igual) al valor de la función objetivo de (P_{max}) (es decir, $\forall x\in V,\ g(x)\geq f(x)$).

En el problema de maximización $v(RP_{max}) \geq v(P_{max})$, en donde (RP_{max}) es una versión optimista de (P_{max}), ya que tiene más soluciones factibles.

La relación entre un problema de minimización y otro de maximización está dada por:

$$max\{f(x)|x \in V\} = -min\{-f(x)|x \in V\}$$

La relajación tiene un rol doble: provee cotas para el valor óptimo de problemas difíciles y sus soluciones, que son usualmente infactibles para el problema original, pueden ser usadas como puntos (guías) para heurísticas especializadas.

Una de las relajaciones más usada para un problema de programación entera (P): *min*(o *max*) $\{f(x) \mid x \in V\}$ es la relajación continua (CR); en este caso se considera el problema (P) con las condiciones de integridad ignoradas en x.

Sin embargo, en muchos casos el resolver la relajación lineal de problema (P) es impráctico, porque típicamente (P) involucra un número grande (frecuentemente extremadamente grande) de variables y/o restricciones (por ejemplo para el problema del agente viajero). Por lo tanto se necesitan técnicas alternativas como la *relajación Lagrangeana*, para generar cotas inferiores.

2.2 Relajación Lagrangeana (LR)

La relajación Lagrangeana fue desarrollada a principios de la década de los 70´s por los pioneros Held y Karp [11] para el problema del agente viajero; hoy en día es una técnica muy utilizada para generar cotas inferiores utilizadas en algoritmos de solución para problemas de optimización entera y combinatoria.

Se asume que el problema original *(P)* es de la forma:

(P) $$\min_x \{ f(x) \mid Ax \le b, Cx \le d, x \in X \},$$

donde X contiene las restricciones de signo de x, y las restricciones de integridad, $X = R^{n-p} \times R^p$, o $X = R_+^{n-p} \times R_+^{p}$, o $X = R_+^{n-p} \times \{0,1\}^p$. Considere *I(X)* como el conjunto de los p índices de x restringidas a ser binarias. Las restricciones $Ax \le b$ se asumen como *complicadas*, en el sentido de que el problema *(P)*, sin ellas, puede ser más sencillo de resolver. Las restricciones $Cx \le d$ se mantienen junto con X para formar la *Relajación Lagrangeana* de *(P)*.

Finalmente, sea λ un vector de pesos no negativo, a las componentes del vector λ se les denomina *multiplicadores Lagrangeanos.* Si se relajan restricciones de igualdad, las componentes del vector λ no tienen restricciones de signo.

Definición 2.3. La *Relajación Lagrangeana* de *(P)* relativa a las restricciones complicadas $Ax \le b$, con los *multiplicadores Lagrangeanos* no negativos λ, es el problema:

(LR$_\lambda$) $$\min_x \{ f(x) + \lambda(Ax - b) \mid Cx \le d, x \in X \}$$

En *(LR_λ)*, las holguras de las restricciones complicadas se han añadido en la función objetivo con un peso λ, en tanto que en las restricciones $Ax \leq b$ se han eliminado. Se puede decir que las restricciones $Ax \leq b$ han sido *dualizadas*. *(LR_λ)* es una relajación de *(P)* por lo siguiente:

a) $FS(LR_\lambda)$ contiene $FS(P)$.

b) Para cualquier x factible para *(P)* y cualquier $\lambda \geq 0$, $f(x)+\lambda(Ax-b)$ es menor o igual que $f(x)$.

De esta manera $v\,(LR_\lambda) \leq v\,(P)$ para toda $\lambda \geq 0$. El valor óptimo $v\,(LR_\lambda)$, el cual depende de λ, es un límite o cota inferior del valor óptimo de *(P)*.

Definición 2.4. El problema para encontrar la mejor cota inferior Lagrangeana de $v(P)$ es:

(LD) $$\max_{\lambda \geq 0} v(LR_\lambda)$$

(LD) es conocido como el *dual Lagrangeano* de *(P)* relativo a las restricciones complicadas $Ax \leq b$, y es un problema en el espacio *dual* de los multiplicadores Lagrangeanos, considerando que *(LR_λ)* es un problema en el espacio de la variable x.

2.3 Soluciones Lagrangeanas factibles.

Si $x(\lambda)$ denota una solución óptima de *(LR_λ)* para algún $\lambda \geq 0$, entonces $x(\lambda)$ se denomina una *solución Lagrangeana*. Aunque se pudiera pensar que una solución $x(\lambda)$ que es factible para el problema entero (satisface las restricciones dualizadas) es también óptima para ése problema, generalmente no es cierto.

Lo que si es cierto es que el valor óptimo de *(P), v(P)* está entre $f(x(\lambda))+\lambda[Ax(\lambda)-b]$ y $f(x(\lambda))$. Ya que $f(x(\lambda))$ es el valor de una solución factible de *(P)* (un cota superior de $v(P)$), y $f(x(\lambda))+\lambda[Ax(\lambda)-b]$ es el valor óptimo del problema Lagrangeano $v(LR_\lambda)$ (una cota inferior de $v(P)$). Si se satisface las holgura complementaria, esto es, si $\lambda[Ax(\lambda)-b]$ es 0, entonces $f(x(\lambda))+\lambda[Ax(\lambda)-b]=v(P)=f(x(\lambda))$, y $x(\lambda)$ es una solución óptima de *(P)*.

Teorema 2.1 (Guignard [10])

- Si $x(\lambda)$ es una solución óptima de (LR_λ) para algunas $\lambda\geq 0$, entonces $f(x(\lambda))+\lambda[Ax(\lambda)-b]\leq v(P)$.
- Si adicionalmente $x(\lambda)$ es factible para *(P),* entonces $f(x(\lambda))+\lambda[Ax(\lambda)-b]\leq v(P)\leq f(x(\lambda))$.
- Si adicionalmente $\lambda[Ax(\lambda)-b]=0$, entonces $x(\lambda)$ es una solución óptima de *(P),* y $v(P)=f(x(\lambda))$.

2.4 Interpretación geométrica

El siguiente Teorema (ver Geoffrion [9]) es el que probablemente muestra de forma más clara la relajación Lagrangeana. Éste da una interpretación geométrica del problema dual Lagrangeano en el espacio de la variable *x,* en este caso el espacio primal (el espacio dual es el de los multiplicadores Lagrangeanos λ). Esto permite estudiar los esquemas de la relajación Lagrangeana (ver figura 2.1).

Teorema 2.2 (Guignard[10])

El *dual Lagrangeano (LD)* es equivalente a la *relajación primal*:

(PR) $$\min_x \{ f(x) \mid Ax \leq b, x \in Co\{x \in X \mid Cx \leq d\}\}$$

en el sentido de que *v(LD)=v(PR).*

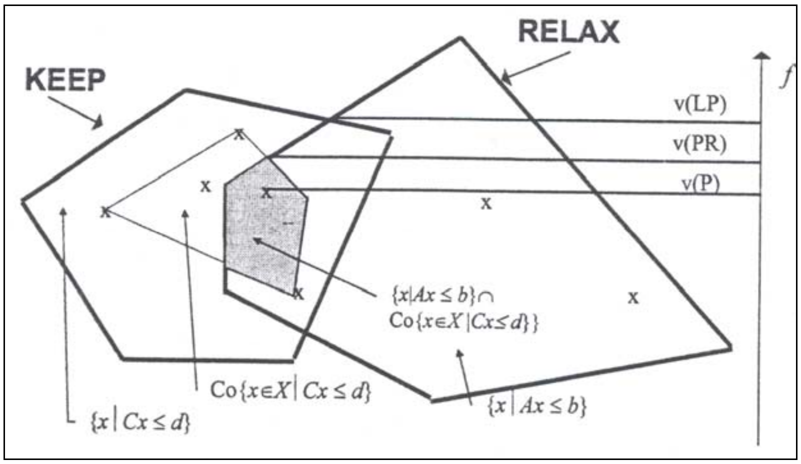

Figura 2. 1 Interpretación geométrica de LD (Guignard [10]).

Definición 2.5. *(LD)* tiene la *Propiedad de Integridad (IP)* si Co$\{x \in X|Cx \leq d\}=\{x|Cx \leq d\}$.

Si *(LD)* tiene la propiedad *IP*, entonces los puntos extremos de $\{x|Cx \leq d\}$ están en *X*. Desafortunadamente, la consecuencia de esta propiedad, es que un esquema de *LR* no puede producir una cota más fuerte que la cota proporcionada por la relajación lineal. Algunas veces esto es útil porque la relajación lineal no puede ser calculada fácilmente. Este puede ser el caso de algunos problemas con un número exponencial de restricciones (por ejemplo, el problema del agente viajero), que pueden ser relajadas de alguna manera para resolver subproblemas. Como se mencionó anteriormente, cualquier cota de relajación Lagrangeana es siempre, al menos, tan buena como la cota proporcionada por la relajación lineal (nunca es peor).

Corolario 2.1 (Guignard[10]). Si $Co\{x \in X|Cx \leq d\}=\{x|Cx \leq d\}$, entonces $v(LP)=v(PR)=v(LD) \leq v(P)$. La cota de la relajación Lagrangeana es igual a la cota proporcionada por la relajación lineal (*LP)* (no puede ser mejor).

Corolario 2.2 (Guignard[10]). Si $Co\{x \in X|Cx \leq d\} \subset \{x|Cx \leq d\}$, entonces $v(LP) \leq v(PR)=v(LD) \leq v(P)$, y puede pasar que la cota de la relajación Lagrangeana sea estrictamente mejor la cota proporcionada por la relajación lineal (*LP)*

En resumen, si *(LD)* no satisface la *Propiedad de Integridad*, puede producir una cota más fuerte que la cota proporcionada por la relajación lineal. Por lo tanto es importante saber si todos los vértices del poliedro racional $\{x \in X|Cx \leq d\}$ están en X.

2.5 Subproblemas Lagrangeanos fáciles de resolver.

Al dualizar restricciones de una manera Lagrangeana, el problema se puede descomponer en subproblemas más fáciles de resolver para algunos problemas de optimización.

Puede darse el caso que los subproblemas Lagrangeanos, incluso cuando en principio son difíciles de resolver porque no satisfacen la Propiedad de Integridad, son mucho más fáciles de resolver a través de alguna descomposición parcial.

2.6 Construyendo una relajación Lagrangeana

Hay muchas maneras en las cuales un problema puede ser relajado de manera Lagrangeana. A continuación se enlistan algunos procedimientos para realizar la relajación Lagrangeana.

(1) **Se puede aislar un subproblema interesante y dualizar las otras restricciones**. Tiene la ventaja de que los problemas “interesantes” tienen estructuras especiales que pueden ser resueltas eficientemente por algoritmos especializados

(2) **Si hay dos o más subproblemas interesantes con variables comunes, se puede separar primero esas variables, y después dualizar la copia de las restricciones.** Esto se conoce como *Descomposición Lagrangeana (LD, por sus siglas en inglés) o separación de variables.* Primero se debe reformular el problema, renombrando las variables en parte de las restricciones como si fueran variables independientes (*separación de variables*).

$(P): \min_x\{f(x) | Ax \leq b, Cx \leq d, x \in X\} = (P'): \min_{x,y}\{ f(x) | Ax \leq b, x \in X, Cy \leq d, y \in X, x=y)$

Ambos problemas tienen valores óptimos iguales pero diferentes espacios de variables. Adicionalmente si x^* es una solución óptima de *(P),* entonces la solución $(x,y)=(x^*,y^*)$ es la solución óptima de *(P’)*. Si (x^*,y^*) es una solución óptima de *(P’)*, entonces $x^* = y^*$ y x^* es la solución óptima de *(P)*. Se dualizan las restricciones copia $x=y$ en *(P´)* con multiplicadores λ (sin restricción de signo), lo cual separa el problema en dos problemas: problema-x y problema-y.

(LD$_\lambda$) $$\min_{x,y}\{f(x)+\lambda(y-x) \mid Ax\le b, x\in X, Cy\le d, y\in X\}$$

$$=\min_x\{(f-\lambda)(x) \mid Ax\le b, x\in X\}+\min_y\{\lambda y \mid Cy\le d, y\in X\}$$

Si se dualizan restricciones de igualdad, una solución Lagrangeana factible es automáticamente factible para el problema de programación entero original. Si las restricciones copias son restricciones de igualdad, y si ambos subproblemas Lagrangeanos tienen la misma solución óptima, esa solución también es óptima para el problema original.

(3) **Se pueden dualizar restricciones de vínculo**. Algunas veces después de la reformulación, los problemas pueden contener estructuras independientes vinculadas por algunas restricciones: $min_{x,y}\{f(x)+g(y)|Ax\le b,\ x\in X,\ Cy\le d,\ y\in Y,\ Ex+Fy\le h\}$. El dualizar las restricciones de vínculo $Ex+Fy\le h$ separa el problema en un problema en el espacio de x y un problema en el espacio de y.

2.7 Características de una Función Lagrangeana.

La *Función Lagrangeana* $z(\lambda)=v(LR_\lambda)$ es una función implícita de λ. Suponga que el conjunto convexo $Co\{x\in X|Cx\le d\}$ es un polítopo, es decir, un poliedro acotado, entonces existe una familia finita $\{x^1, x^2, \ldots, x^K\}$ de puntos extremos de $Co\{x \in X|Cx \leq d\}$, de tal manera que $Co\{x \in X|Cx \leq d\} = Co\{x^1, x^2, \ldots, x^K\}$. Por lo tanto:

$$\min_x \{f(x) + \lambda(Ax - b) \mid Cx \leq d, x \in X\} = \min_{k=1,\ldots,K} \{f(x)^k + \lambda(Ax^k - b)\}$$

y $z(\lambda)$ es la envolvente inferior de una familia de funciones lineales de λ, $f(x)^k + \lambda(Ax^k - b)$, $k=1,\ldots,K$, por lo que es una función cóncava de λ, con puntos de ruptura en donde $z(\lambda)$ no es diferenciable (en donde la solución óptima de (LR_λ) no es única). La Figura 2.2 muestra la función Lagrangeana para el caso en donde *(P)* es un problema de maximización, *(LD)* es un problema de minimización, y $z(\lambda)$ es una función convexa de (λ).

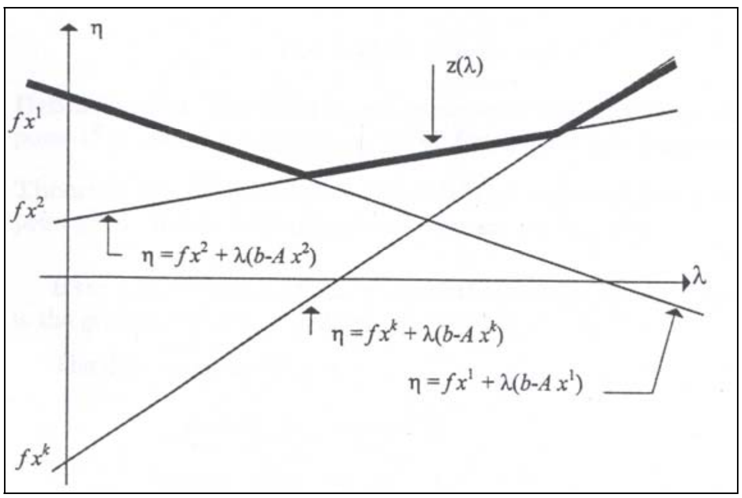

Figura 2.2 Función Lagrangeana para el caso de maximización (Guignard [10]).

Una función cóncava $f(x)$ es continua sobre el interior relativo de su dominio, y es diferenciable en casi todos los puntos. En los puntos en donde no es diferenciable, la función no tiene un gradiente, pero siempre tiene subgradientes.

Definición 2.6. Un vector $y \in (R^n)^*$ es un subgradiente de una función cóncava *f(x)* en el punto $x^0 \in R^n$ si para toda $x \in R^n$:

$$f(x) - f(x^0) \leq y \cdot (x - x^0)$$

Definición 2.7. El conjunto de todos los subgradientes de una función cóncava *f(x)* en un punto x^0 se conoce como la *derivada parcial* de f en x^0, y se denota como $\partial f(x^0)$.

Teorema 2.3. La *derivada parcial* $\partial f(x^0)$ de una función cóncava *f(x)* en el punto x^0 nunca es vacío, es cerrado, convexo y acotado.

Si la derivada parcial de f en x^0 consiste de un único elemento, ese elemento es el gradiente de f en x^0, denotado por $\nabla f(x^0)$.

El problema dual *(LD)* es:

(LD) $$\max_{\lambda \geq 0} v(LR_\lambda) = \max_{\lambda \geq 0} z(\lambda)$$

$$= \max_{\lambda \geq 0} \min_{k=1,\ldots,K} \{f(x^k) + \lambda(Ax^k - b)\}$$

$$= \max_{\lambda \geq 0, \eta} \{\eta \mid \eta \leq f(x^k) + \lambda(Ax^k - b), k = 1, \ldots, K\}$$

Suponga que λ^* es un minimizador de $z(\lambda)$, y $\eta^* = z(\lambda^*)$. Suponga que λ^k es un estimador actual en λ^*, $\eta^k = z(\lambda^k)$, y $H_k = \{\lambda | f(x^k) + \lambda(Ax^k - b) = \eta^k\}$ es un hiperplano de nivel que pasa a través de λ^k.

- Si $z(\lambda)$ es diferenciable en λ^k ((LR_λ) tiene una solución óptima única x^k), tiene un gradiente $\nabla z(\lambda^k)$ en λ^k:

$$\nabla^T z(\lambda^k)=(Ax^k\text{-}b)\perp H_k$$

- Si $z(\lambda)$ no es diferenciable en λ^k ($(LR_\lambda{}^k)$ tiene múltiples soluciones óptimas), se puede mostrar que el vector $s^k=(Ax^k\text{-}b)^T$ es un *subgradiente* de $z(\lambda)$ en λ^k. El vector s^k es ortogonal a H^k.

Si se consideran los contornos $C(\alpha)=\{\lambda\in R_+{}^m|z(\lambda)\geq\alpha\}$, en donde α es un escalar, esos contornos son conjuntos de poliedros convexos como se muestra en la Figura 2.3. Además un subgradiente no es necesariamente una dirección de ascenso, incluso localmente, como se ve en la misma figura.

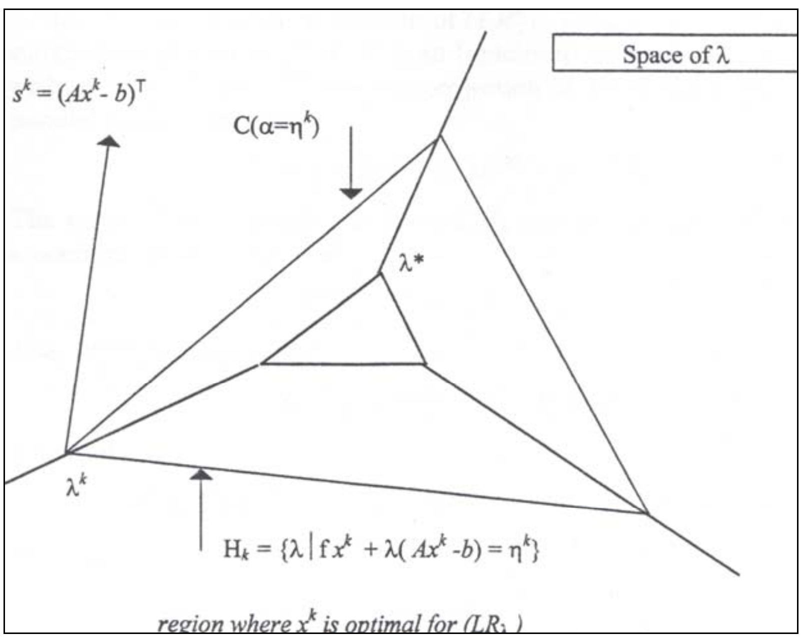

Figura 2.3 Contornos de la Función Lagrangeana (Guignard [10]).

2.8 Métodos para resolver las relajaciones duales.

Existen métodos que han sido propuestos para solucionar el dual Lagrangeano, por ejemplo, métodos de ascenso dual y el método de optimización subgradiente.

2.8.1 Método de optimización subgradiente.

Este método fue propuesto por Held y Karp [12], y fue validado por Held [13]. Este es un método iterativo en el cual, en la iteración k, dado un vector de multiplicadores λ^k, se elige una longitud de paso a lo largo del subgradiente de $z(\lambda^k)$. Entonces, si es necesario, el punto resultante se proyecta sobre el ortante no negativo.

Suponga que $x^{(k)}$ es la solución óptima de (LR_λ^k). Entonces $s^k=(Ax^{(k)}-b)^T$ es un subgradiente de $z(\lambda)$ en λ^k. Si λ^* es una solución óptima (desconocida) de *(LD),* con $\eta^*=z(\lambda^*)$, entonces λ'^{k+1} es la proyección de λ^k sobre el hiperplano H^* paralelo a H_k, definido como:

$$H^*=\{\lambda|f(x^k)+\lambda(Ax^{(k)}-b)=\eta^*\}$$

El vector s^k es perpendicular a ambos H_k y H^*, por lo tanto $\lambda'^{k+1}-\lambda^k$ es un múltiplo no negativo de s^k:

$$\lambda'^{k+1}-\lambda^k=\mu s^k,\ \mu\geq 0$$

También λ'^{k+1} pertenece a H^*:

$$f(x^{(k)}) + \lambda'^{k+1}\ (Ax^{(k)}-b)=\eta^*$$

por lo tanto:

$$f\left(x^k\right)+\lambda^k\left(Ax^k-b\right)+\mu s^k\left(Ax^{(k)}-b\right)=\eta^k+\mu s^k\cdot s^k=\eta*$$

y

$$\mu = \frac{\eta^* - \eta^k}{\| s^k \|^2}$$

de tal manera que

$$\lambda'^{k+1} = \lambda^k + \frac{s^k(\eta^* - \eta^k)}{\| s^k \|^2}$$

Finalmente se define $\lambda^{k+1} = [\lambda'^{k+1}]^+$ (se define el siguiente iterando λ^{k+1} como la proyección de λ'^{k+1} sobre el ortante no negativo, puesto que λ debe ser no negativo). Dadas estas proyecciones geométricas, es claro que λ^{k+1} está más cerca de λ^* que de λ^k, por lo que la secuencia $||\lambda^k - \lambda^*||^2$ es monótona no creciente.

Desafortunadamente esta formula usa el valor óptimo desconocido η^*de *(LR).* Aunque se puede usar un estimado para este valor, y utilizar un múltiplo de s^k muy grande o muy pequeño. Si se observa que la función objetivo no mejora por muchas iteraciones, se puede esperar que η^* haya sido sobrestimado (para un problema de maximización), por lo que se debería tratar de reducir la diferencia η^*-η^k. Esto se puede lograr introduciendo desde el inicio un factor positivo $\varepsilon_k \in (0,2)$ en la formula de subgradiente:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \frac{s^k \cdot \varepsilon_k (\eta^* - \eta^k)}{\| s^k \|^2}$$

y reduciendo el escalar ε_k cuando no hay mejora por un período largo de tiempo.

La convergencia del método de subgradiente es impredecible. Para algunos problemas la convergencia es rápida y bastante confiable, pero para otros tiende a producir un comportamiento errático en la secuencia de multiplicadores, o en el valor Lagrangeano, o en ambos. En un “buen” caso usualmente se observará un comportamiento de “diente de sierra” en el valor Lagrangeano durante las primeras iteraciones, seguido de un período de mejora estable que convergerá hacia un valor que será la cota óptima Lagrangeana. En el peor de los casos, el comportamiento de “diente de sierra” continúa, y el valor Lagrangeano se sigue deteriorando.

2.9 Descomposición en subproblemas.

En muchos casos, el subproblema Lagrangeano se descompone en problemas más pequeños, lo cual implica que la región factible es actualmente el producto Cartesiano de regiones más pequeñas.

Una ventaja de esto es la reducción en la complejidad computacional para los subproblemas Lagrangeanos. Es mucho más fácil resolver 50 problemas con 100 variables binarias cada uno, que un solo problema con 5000 variables binarias.

2.10 Heurísticas Primales.

La relajación Lagrangeana proporciona cotas duales y pueden utilizarse para obtener cotas primales. Si una solución Lagrangeana satisface la “*holgura complementaria*” se puede decir que ésta es una solución óptima del problema IP. Si esta solución es factible pero no se satisfacen las condiciones de holgura complementaria, la solución es, por lo menos, una solución factible del problema original y todavía es necesario determinar, por el método de ramificación y acotamiento (u otro método), si es óptima o no. De otro modo la relajación Lagrangeana genera soluciones enteras infactibles. Bastante a menudo estas soluciones son casi factibles, a comparación de otras que hayan sido penalizadas por violar un gran número de restricciones. Actualmente hay muchos trabajos que estudian las posibles maneras de modificar las soluciones Lagrangeanas (infactibles) para hacerlas factibles. Las heurísticas primales son esencialmente dependientes del problema, y sólo se proporcionarán puntos clave de cómo proceder. Se puede tratar de tener soluciones factibles en las siguientes maneras:

(1) Modificando la solución para corregir sus infactibilidades mientras se mantiene un deterioro pequeño de la función objetivo.
(2) Ajustando (a 1 o 0) algunas de las variables de decisión significativas de acuerdo con el valor en la solución Lagrangeana actual, resolviendo en forma óptima el problema resultante. Un principio guía consiste en ajustar variables que satisfagan las restricciones relajadas.

Parte del éxito de la relajación Lagrangeana proviene de la implementación inteligente de métodos para resolver el dual Lagrangeano, con heurísticas primales poderosas aplicadas en cada iteración de la optimización subgradiente. En muchos casos la diferencia entre la mejor cota Lagrangeana, y la mejor solución factible encontrada por las heurísticas primales, es lo suficientemente pequeña para ignorar la diferencia numérica. Sin embargo, en algunas instancias, al menos una solución óptima es deseada, y un esquema de ramificación y acotamiento adaptado para remplazar las cotas de la relajación lineal por aquellas de la relajación Lagrangeana puede ser usado. La esperanza es que dichos esquemas convergerán más rápido que un LP basado en ramificación y acotamiento, porque las cotas estarán más ajustadas y los nodos del árbol de enumeración pueden ser agotados rápidamente. Sin embargo, la cantidad de trabajo requerido en cada nodo, puede ser sustancialmente mayor al trabajo requerido en un esquema de relajación lineal.

2.11 Observaciones

- La relajación Lagrangeana es una poderosa familia de herramientas para resolver en forma aproximada problemas de programación entera. Esta provee:
  - Cotas más fuertes que la relajación lineal cuando el (los) subproblema(s) no satisfacen la Propiedad de Integridad.
  - Buenos puntos de inicio para heurísticas de búsqueda.
- La disponibilidad de poderosas interfaces (GAMS, AMPL, etc.) y de paquetes flexibles de programación entera hacen posible que el usuario disponga de diferentes esquemas y los implemente y pruebe.
- La relajación Lagrangeana es muy flexible. Algunas veces es necesaria una reformulación para tener un esquema realmente bueno.
- No es necesario tener una estructura especial en un problema para tratar de usar los esquemas Lagrangeanos. Si es posible descomponer el problema estructuralmente en componentes significativos, y separarlos a través de restricciones de dualización (posiblemente después de haber introducido una nueva variable), probablemente vale la pena seguir intentando utilizar el esquema de relajación Lagrangeana.

- Las soluciones finales de uno o más de los subproblemas Lagrangeanos se pueden usar en heurísticos primales, posiblemente seguidos de heurísticos de búsqueda local, para obtener buenas soluciones factibles.
- Las cotas de relajación Lagrangeana acompañadas con heurísticos primales proporcionan al analista distintas regiones alrededor del valor entero óptimo. Estos son usualmente mucho más ajustados que aquellos obtenidos con cotas basadas en LP o heurísticas.