CAPITULO 3

Descripción del problema

En este capítulo se describe el problema de máxima cobertura sin capacidad (**MCLP**) y con capacidad (**CMCLP**). Posteriormente se presentan los modelos de programación matemática para ambos.

3.1 Descripción del MCLP

El problema de localización de máxima cobertura considera la siguiente situación. Sea $I = \{1, \cdots, m\}$ un conjunto de índices de ubicaciones potenciales para localizar instalaciones (centros de servicio), y $J = \{1, \cdots, n\}$ un conjunto de índices para los clientes. Para cada cliente $j \in J$ se especifica una cierta demanda del servicio h_j, y para cada par $i \in I, j \in J$ se especifica una distancia d_{ij}. Se requiere determinar cuál es la máxima cobertura de la demanda, dado un radio de cobertura δ, seleccionando como máximo p instalaciones (p también es un valor dado). Se consideran las siguientes variables de decisión:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si el cliente } j \in J \text{ tiene cobertura del servicio} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

y

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se selecciona una instalación en la ubicación } i \in I \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Sea

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el cliente } j \in J \text{ puede ser cubierto por una instalación} \\ & \text{ubicada en el nodo } i \in I \text{ , } (\text{i. e. } d_{ij} \leq \delta) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

El problema de localización de máxima cobertura puede formularse de la siguiente manera:

$$\begin{array}{llcclr} \text{Maximizar} & \sum_{j \in J} h_j x_j & & & & \\ \text{sujeto a} & x_j & \leq & \sum_{i \in I} a_{ij} y_i & \forall j \in J & (1) \\ & \sum_{i \in I} y_i & \leq & p & & (2) \\ & x_j & \in & \{0,1\} & \forall j \in J & (3) \\ & y_i & \in & \{0,1\} & \forall i \in I & (4) \end{array}$$

El conjunto de restricciones (1) asegura que un cliente tiene cobertura siempre y cuando exista una instalación dentro del radio de cobertura. La restricción (2) asegura que se seleccionan a lo más p instalaciones. Las restricciones de integridad de las variables de decisión se expresan mediante (3) y (4).

3.2 Descripción del CMCLP

Para formular el problema de máxima cobertura capacitado, se considera una capacidad *bi* de cada instalación $i \in I$ y las siguientes variables de decisión:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el cliente } j \in J \text{ está cubierto por una instalación} \\ & \text{ubicada en el nodo } i \in I \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

y

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se selecciona una instalación en la ubicación } i \in I \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El problema de máxima cobertura capacitado se formula de la siguiente manera:

$$\begin{array}{llcccr} \text{Maximizar} & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} h_j x_{ij} & & & & \\ \text{sujeto a} & \sum_{i \in I} x_{ij} & = & 1 & \forall j \in J & (1) \\ & \sum_{j \in J} a_{ij} h_j x_{ij} & \leq & b_i y_i & \forall i \in I & (2) \\ & \sum_{i \in I} y_i & \leq & p & & (3) \\ & x_{ij} & \in & \{0,1\} & \forall i \in I, j \in J & (4) \\ & y_i & \in & \{0,1\} & \forall i \in I & (5) \end{array}$$

Las restricciones (1) aseguran que cada cliente sea asignado a una sola instalación. El conjunto de restricciones (2) garantizan que se respete la capacidad de las instalaciones seleccionadas y, además, prohíben la asignación de clientes a centros cerrados. La restricción (3) permite seleccionar a lo más p instalaciones, mientras que (4) y (5) son las restricciones de integridad de las variables de decisión. Este problema ha sido estudiado en Chung et. al [2], Current y Storbeck [6], y en Pirkul y Shilling [17].

3.3 Modelo base para el diseño de CMCLP.

En el trabajo de Lorena [16] se utiliza un Modelo Lineal Unificado (**ULM**) desarrollado por Hillsman [14] con el objetivo de adaptar los coeficientes de distancia para un problema de la p-mediana, de manera que refleje la información de la demanda de una población.

Esta transformación permite la aplicación de la relajación Lagrangeana al problema de la p-mediana para obtener sus cotas inferiores.

El problema de la p-mediana se puede formular de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{llllll}
\text{Min} & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij} & & & & \\
\text{sujeto a} & \sum_{i \in I} x_{ij} & = & 1 & \forall j \in J & (1) \\
 & \sum_{i \in I} y_i & = & p & & (2) \\
 & x_{ij} & \leq & y_i & \forall i \in I,\, j \in J & (3) \\
 & x_{ij} & \in & \{0,1\} & \forall i \in I,\, j \in J & (4) \\
 & y_i & \in & \{0,1\} & \forall i \in I, & (5)
\end{array}
$$

La función objetivo representa la distancia total de cada punto de demanda a la instalación más cercana. Las restricciones (1) y (3) aseguran que todos los puntos de demanda sean asignados a una sola instalación. La restricción (2) garantiza que exactamente *p* instalaciones sean localizadas. Las condiciones de integridad están dadas por las restricciones (4) y (5).

Utilizando el **ULM** de Hillsman [14], en el problema de **MCLP** la demanda (h_j) es conocida, por lo tanto se puede cambiar la matriz d_{ij} del pMP por nuevos coeficientes C_{ij} (Hillsman [14]), calculándolos de la siguiente forma:

$$C_{ij} = \begin{cases} 0, & si \quad d_{ij} \leq \delta \\ h_j, & si \quad d_{ij} \geq \delta \end{cases}$$

Por lo tanto, la función objetivo del pMP cambia su significado al de minimizar la población insatisfecha; es decir, aquellos puntos de demanda cuya distancia es mayor al del radio de cobertura; por lo tanto, el problema de máxima cobertura, aplicando el método de Hillsman, queda formulado de la siguiente manera:

$$v(MCLP) = \sum_{j \in J} h_j - v(pMP)$$

Por lo tanto, se propuso implementar este mismo concepto al *problema de localización de máxima cobertura capacitado.*

3.4 Modelo propuesto de CMCLP.

Se aplicó el método **ULM** de Hillsman para resolver el **CMCLP**, usando una formulación análoga a la del problema de la p-Mediana Capacitado (**pCMP**). La formulación es la siguiente:

$v(CMCLP) = \sum_{j \in J} h_j - v(pCMP)$, donde

$$
\begin{array}{llllll}
v(pCMP) = & \text{Min} & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} C_{ij} x_{ij} & & & \\
& \text{sujeto a} & \sum_{i \in I} x_{ij} & = 1 & \forall j \in J & (1) \\
& & \sum_{i \in I} y_i & = p & & (2) \\
& & \sum_{j \in J} a_{ij} h_j x_{ij} & \leq b_i y_i & \forall i \in I & (3) \\
& & x_{ij} & \in \{0,1\} & \forall i \in I, j \in J & (4) \\
& & y_i & \in \{0,1\} & \forall i \in I & (5)
\end{array}
$$

La función objetivo representa ahora la cantidad de demanda insatisfecha. Las restricciones (1) especifican que cada cliente debe de ser servido por una sola instalación. La restricción (2) indica que exactamente p instalaciones sean escogidas como candidatos para la ubicación de instalaciones y, además, prohíben la asignación de clientes a centros cerrados. El conjunto de restricciones (3) garantizan que se respete la capacidad de las instalaciones seleccionadas. Las condiciones de integridad están dadas por las restricciones (4) y (5).