

## CAPÍTULO I

### PANORAMA GENERAL

En este capítulo se mostrará una descripción de los problemas de localización con las características que los distinguen. De igual forma, se presenta el modelo que es tema de este proyecto de tesis: Problema de Localización de Máxima Cobertura Capacitado.

#### **1.1 Problemas de Localización**

En primer lugar, el área general donde se ubica el problema mencionado anteriormente, es la localización de instalaciones. Scaparra y Scutellà (2001) mencionan en su artículo que el primer modelo de localización fue elaborado por Alfred Weber en 1909. Sin embargo, el campo de estudio como tal, llamado localización de instalaciones, no se dio a conocer sino hasta 1960.

Los problemas de localización consideran situaciones en las que se requiere encontrar la opción óptima dentro de un contexto espacial para ubicar instalaciones; por ejemplo, fábricas, almacenes, escuelas, hospitales, máquinas y departamentos dentro de instalaciones de producción, así como el diseño de redes de transporte, información, agua y energía. Aunado a esto, los problemas se pueden definir en su forma más general como sigue. Existe un conjunto de clientes, distribuidos espacialmente en un área geográfica, que generan demanda de ciertos bienes o servicios; se busca servir a estos clientes para que dicha demanda sea proveída por una o más instalaciones, que pueden operar en un sistema cooperativo o competitivo, dependiendo del tipo de bien o servicio requerido. El proceso de

decisión debe establecer dónde colocar las instalaciones en el espacio territorial teniendo en cuenta los requerimientos de los usuarios y las restricciones geográficas posibles (Scaparra y Scutellà, 2001). Además de las consideraciones de factores físicos, económicos, sociales, militares, ambientales o políticos, tales como construcciones disponibles, distancias, rutas de transportación, mercados, inversiones, costos, etc. Igualmente, cada decisión particular sobre el emplazamiento de una instalación puede implicar costos de “*set up*” y operación por servir a los clientes. Temas como la reducción de costos, la captura de demanda, el servicio equitativo, la respuesta rápida, etc., dirigen la selección de la ubicación de una instalación (Scaparra y Scutellà, 2001). Recientemente, esta toma de decisiones se apoya en el uso de modelos simbólicos. Es decir, cuando se conoce de antemano el conjunto de ubicaciones potenciales, a menudo, los problemas de localización se pueden formular utilizando modelos de optimización discreta o combinatoria.

La familia de problemas en esta área, la terminología, la formulación de los problemas en términos de optimización y los algoritmos de solución tienen sus raíces en la investigación de operaciones, ingeniería industrial, ciencias administrativas y computacionales.

Para Scaparra y Scutellà (2001), en la definición general del problema de localización se identifican tres elementos que juegan un papel relevante: instalaciones, clientes y localizaciones.

### ***1.1.1 Instalaciones***

El término se utiliza para denotar una gran variedad de objetos para los cuales se debe determinar una posición espacial con el fin de optimizar la interacción con otros objetos preexistentes. El ejemplo clásico al utilizar dicha palabra en la teoría de localización es para referirse a objetos como almacenes, plantas, escuelas, hospitales, distribuidores minoristas y muchas otras estructuras industriales, comerciales y públicas.

Las principales características de las instalaciones son: su número, su tipo y el costo asociado a ellas.

1. Número. Los problemas de multi-instalaciones incluyen casos donde existe un número predefinido y fijo de instalaciones a localizar y aquellos donde hay un número variable de instalaciones que se determinará durante el proceso de decisión.
2. Tipo. En el tipo de la instalación se involucran consideraciones de capacidad, servicio y estructura. En algunos casos se intenta localizar instalaciones idénticas en tamaño y tipo de servicio; en otros se ubican instalaciones que difieren entre ellas. En ocasiones, se toman en cuenta instalaciones con capacidad infinita y otras veces con producción o capacidad limitada.
3. Costos. Los costos se refieren a los gastos fijos incurridos en la apertura y los cargos variables relacionados con la entrega del servicio.

### 1.1.2 Localizaciones

Se refiere al lugar físico donde las instalaciones deben posicionarse. El conjunto de puntos elegibles (usualmente el espacio de solución) se puede representar espacialmente de tres maneras: continua, discreta y de red.

En el caso discreto se puede especificar una lista de sitios posibles para la localización de una instalación específica. Éste resulta ser el modo más natural de diseñar problemas cuando la disponibilidad de terreno, regulaciones o la presencia de estructuras preexistentes requieren que una nueva instalación sea abierta únicamente en puntos predefinidos dentro del área bajo consideración.

Por otro lado, el caso continuo se usa cuando el espacio donde se ubicarán las instalaciones o donde se tiene puntos preexistentes, es un espacio determinado por coordenadas que varían de modo continuo; generalmente, son considerados en el espacio Euclidiano ( $\mathcal{R}^2$ ), más generalmente en un espacio  $n$ -dimensional ( $\mathcal{R}^n$ ). Los problemas bidimensionales son más populares por razones de naturaleza geográfica. Complementando la definición, a los modelos continuos se les refiere, gracias a Love, Morris y Wesolowsky (1988) citados en Scaparra y Scutellà (2001), como modelos de generación de sitios (“*site-generation*”) debido a que se asume que no se tiene conocimiento *a-priori* de los candidatos particulares de localizaciones, y la generación de estos se deja al modelo.

Cuando se usa una red para describir el modelo, la teoría de grafos es de gran utilidad; los problemas continuos o discretos se pueden modelar con una red. Se usan los nodos como los puntos de localización posibles cuando se trata de un modelo discreto

### **1.1.3 Clientes**

La palabra cliente se utiliza, de manera tradicional, para denotar a aquellas personas que requieren accesibilidad a un servicio o suministro de un bien. Es importante conocer su distribución, su demanda y su comportamiento.

1. Se puede asumir que están distribuidos uniformemente sobre un conjunto dado de puntos o que tienen ubicaciones específicas en un espacio.
2. La demanda actual de un cliente es el peso con el que se expresa la cantidad de servicio que éste requiere. Dicha demanda no tiene que ser conocida necesariamente.
3. Con referencia al comportamiento, el cliente puede elegir qué instalación desea que le sirva o ser asignado arbitrariamente a alguna.

## **1.2 Problemas de Cobertura**

Dentro del área de localización, existen muchos problemas “tipo”, cada uno con diversas características y fines. Una de las categorías contempla los Problemas de Cobertura (“*Covering Problems*”). Scaparra y Scutellà (2001) enuncian que el punto central

de los modelos de cobertura es encontrar aquellas ubicaciones para el emplazamiento de las instalaciones, de modo que se le dé a los clientes potenciales (que estén dentro de cierta distancia o tiempo de traslado) el acceso a los servicios que se ofrecen con la meta de proporcionarles cobertura de servicio.

Scaparra y Scutellà (2001) agregan que, los modelos de cobertura fueron desarrollados originalmente para problemas de localización en el sector público, pero también pueden ser usados en el diseño de redes de multi-instalaciones para empresas minoristas de servicios (como cines o bancos).

Los Problemas de Máxima Cobertura, son definidos por Scaparra y Scutellà (2001) como aquellos en donde la cobertura es optimizada con un presupuesto limitado. Esto se traduce a una restricción en el número de instalaciones que se deben de abrir, el cual es conocido de inicio. Así mismo, la demanda de los clientes es determinística y fija, y se busca maximizar la cobertura de servicio.

### ***1.2.1 Problema de Localización de Máxima Cobertura***

Profundizando un poco más en el área se llega a modelos más específicos aún. Tal es el caso del modelo que se conoce como Problema de Localización de Máxima Cobertura, formulado por Church y ReVelle y mencionado en Scaparra y Scutellà (2001), que se presenta a continuación:

$$\text{Max} \sum_{j \in J} h_j x_j \quad (1)$$

Sujeto a

$$\sum_{i \in I} c_{ij} y_i \geq x_j \quad \forall j \in J \quad (2)$$

$$\sum_{i \in I} y_i = p \quad (3)$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad \forall j \in J \quad (4)$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in I \quad (5)$$

donde,

$J$  es el conjunto de todos los puntos de demanda,

$I$  es el conjunto de ubicaciones potenciales,

$h_j$  es la demanda del punto  $j$ ,

$p$  es el número de instalaciones a ser abiertas,

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el cliente } j \text{ está dentro del radio de cobertura de la instalación } i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si la demanda en el punto } j \text{ está cubierta} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si una instalación es abierta en } i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función objetivo (1) maximiza la demanda cubierta por las instalaciones abiertas.

El conjunto de restricciones (2) nos indica que un cliente  $j \in J$  sólo se puede asignar a una instalación localizada en el nodo  $i \in I$  si dicha instalación está abierta y si el cliente está dentro del radio de cobertura de la misma. La restricción (3) asegura que se abren  $p$  instalaciones. Los conjuntos de restricciones (4) y (5) son las restricciones de integridad de las variables de decisión.

### 1.3 Problema de Localización de Máxima Cobertura Capacitado

Ahora bien, generalmente en el mundo real no existe capacidad infinita; por lo tanto, se desarrolló una extensión del Problema de Máxima Cobertura en el que no se considera que las instalaciones, que servirán la demanda de los clientes, tienen capacidad ilimitada. Éste es conocido como el Problema de Localización de Máxima Cobertura Capacitado (CMCLP por sus siglas en inglés) y es el problema que es objeto de estudio en el presente proyecto de tesis. Current y Storbeck (1988), mencionados por las autoras Scaparra y Scutellà (2001), trataron sobre los modelos de Máxima Cobertura con restricciones de capacidad en instalaciones en 1988.

El modelo matemático del problema usado en este trabajo se presenta a continuación:

$$\text{Max} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} h_j x_{ij} \quad (6)$$

Sujeto a

$$\sum_{i \in I} y_i \leq p \quad (7)$$

$$\sum_{i \in I_\delta(j)} x_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in J \quad (8)$$

$$\sum_{j \in J_\delta(i)} h_j x_{ij} \leq b_i y_i \quad \forall i \in I \quad (9)$$

$$y_i = \{0, 1\} \quad \forall i \in I \quad (10)$$

$$x_{ij} = \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in J \quad (11)$$

donde,



$J$  es el conjunto de todos los puntos de demanda,

$I$  es el conjunto de ubicaciones potenciales,

$h_j$  es la demanda del punto  $j$ ,

$b_i$  es la capacidad de una instalación en el sitio  $i$ ,

$p$  es el número de instalaciones a ser abiertas,

$\delta$  es la distancia o tiempo máximo de servicio,

$d_{ij}$  es la distancia que hay del nodo  $i$  al nodo  $j$ ,

$$I_\delta(j) = \{i \in I : d_{ij} \leq \delta\},$$

$$J_\delta(i) = \{j \in J : d_{ij} \leq \delta\},$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la demanda en el punto } j \text{ es servida por la instalación en el punto } i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si la instalación es abierta en } i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Con este modelo se busca, de igual manera, maximizar la demanda de los clientes, siempre y cuando estén dentro del radio de cobertura de las instalaciones abiertas. Esto se consigue con la función objetivo (6). La restricción (7) evita que se localicen más de  $p$  instalaciones, que es el número máximo predefinido de instalaciones a abrir. Después, el conjunto de restricciones (8) nos aseguran que un cliente no se asignará a más de una instalación. Posteriormente, es en el conjunto de restricciones (9) donde se incorpora la capacidad de las instalaciones para servir una determinada cantidad de demanda; en primer lugar, un cliente  $j \in J$  no puede ser asignado a una instalación en el punto  $i \in I$  si ésta no ha sido abierta; además, el total de la demanda de los clientes asignados a alguna instalación  $i \in I$  no puede sobrepasar la capacidad total de la misma. La naturaleza binaria de las variables es considerada en las restricciones (10) y (11).

#### **1.4 Objetivo del proyecto**

Proponer y programar un algoritmo en el Lenguaje de Programación C que resuelva de manera exacta el Problema de Localización de Máxima Cobertura Capacitado (CMCLP por sus siglas en inglés).

#### **1.5 Justificación del proyecto**

Hasta el mejor conocimiento del autor, no existe publicado un algoritmo especializado que resuelva de manera exacta el Problema de Localización de Máxima Cobertura Capacitado. Los investigadores que trabajan con este tipo de problemas los resuelven utilizando CPLEX 9.1 (un paquete de optimización de propósito general) que generalmente logra conseguir el óptimo o arroja muy buenos resultados; sin embargo, no permite aprovechar la estructura del problema, a modo de encontrar las soluciones con esfuerzo computacional razonable. Aunado a las limitaciones de tiempo y computacionales que se suelen encontrar en problemas de gran escala. Un algoritmo exacto que permita obtener mejores resultados será de gran utilidad ya que, además de que el problema tiene muchas aplicaciones en sí mismo, también aparece como un sub-problema en otros problemas de optimización (por ejemplo el problema de  $p$ -Centro Capacitado).