CAPÍTULO II

METODOLOGÍA DE SOLUCIÓN

Este capítulo es de suma importancia ya que en él se explica la metodología de solución utilizada en este trabajo para resolver de manera exacta el Problema de Localización de Máxima Cobertura Capacitado, describiendo los diversos procedimientos de la metodología para encontrar la solución óptima de un problema en particular.

2.1 Idea General

La forma de asegurar que se ha encontrado el óptimo de un problema es enumerando todas las soluciones posibles hasta determinar cuál es la mejor. La tarea no es sencilla cuando se trata de problemas de gran escala, dada la enorme cantidad de combinaciones posibles que arrojan soluciones específicas. Sin embargo, se han desarrollado métodos de enumeración que reducen el esfuerzo enumerativo y que de manera implícita enumeran todas las soluciones. Esto es, se generan un árbol con ramas, que están formadas por nodos representando soluciones parciales con variables fijadas a valores específicos (0 o 1 en el caso de este proyecto) en cada una de ellas. Se determinan criterios de corte asociados a los valores de solución encontrados en un momento dado; de modo que al cumplirse alguno de ellos, las soluciones que se encontrarían al seguir ramificando se consideran enumeradas implícitamente ya que no mejorarían la mejor solución conocida hasta ese punto, son infactibles o proporcionan una solución factible. Utilizar este método de solución requiere de los siguientes puntos:

1. Cota Superior. Es el valor límite superior de la solución óptima de un problema en particular que se podría encontrar con la combinación de variables fijadas a valores específicos en cierto punto. Éste va disminuyendo conforme se avanza en la ramificación. En problemas de maximización, las cotas superiores se pueden obtener por medio de relajaciones lineales y relajaciones Lagrangeanas. Se sabe que las cotas calculadas con una relajación Lagrangeana son al menos iguales o mejores que las obtenidas por medio de una relajación lineal y que, además, nos arrojan valores enteros para las variables de decisión. Por esto, se utilizará una relajación Lagrangeana en este punto.

2. Cota Inferior. Generalmente, los valores solución obtenidos con una relajación Lagrangeana son infactibles para el problema original; por lo que es necesario hacer factibles dichas soluciones. Esto se consigue con el uso de alguna heurística primal que nos arroja un valor límite inferior, en problemas de maximización, para la solución de un problema en particular con la combinación de variables fijadas en ciertos valores. La heurística primal utilizada en este proyecto se explica con más detalle en el Capítulo 4.

3. Esquema Enumerativo. En este punto se tiene que definir la estrategia que se utilizará para poder enumerar los valores solución de un problema en particular eficientemente y tratando de cortar lo más rápido posible a modo reducir el esfuerzo enumerativo y encontrar el óptimo del problema de manera más rápida. Así, se define lo siguiente:

a. Estrategia de exploración. La estrategia utilizada en este proyecto fue "Depth-First-Search" (Búsqueda a profundidad) que la enciclopedia en línea Wikipedia (2005) define como un algoritmo de búsqueda en un árbol, estructura de árbol o grafo en el que se empieza en un nodo raíz y se explora a través de la rama saliente de dicho nodo tan lejos como sea posible (hasta que alguno de los criterios de corte se cumpla) antes de hacer "*backtracking*" (ir al nodo más reciente en alguna rama que no haya terminado de explorarse). Los nodos que se creen y no se exploren en el momento de su creación, se almacenan con el esquema LIFO (último en entrar, primero en salir), y es al primero de la lista al que se regresa al hacer "*backtracking*".

b. Ramificación. Aquí es necesario especificar en qué variables de decisión se ramificará primero y cuál será el criterio para ir construyendo una rama en particular. Tales decisiones se amplían en el Capítulo 4.

2.2 Relajación de Problemas de Optimización

Para las secciones siguientes. Si (P) es un problema óptimo, la siguiente notación es usada:

$FS(P)$, el conjunto de soluciones factibles del problema (P)

$OS(P)$, el conjunto de soluciones óptimas del problema (P)

$v(P)$, el valor óptimo del problema (P)

u^k, s^k, etc., el valor de u, s, etc., usados en la iteración k

x^T, la transpuesta de x

x^k, el k-ésimo punto extremo de algún poliedro

$x^{(k)}$, una solución encontrada en la iteración k

$co(X)$, la envoltura convexa del conjunto X

Relajar un problema, como su nombre lo indica, es hacer un problema difícil más fácil de resolver, quitándole restricciones. Geoffrion (1974), define una relajación de un problema de maximización de la siguiente manera:

Definición 1: El problema $(RP_{\max}): \max\{g(x) \mid x \in W\}$ es una relajación del problema $(P_{\max}): \max\{f(x) \mid x \in V\}$, con la misma variable de decisión x, si y sólo si

(i) el conjunto factible de (RP_{max}) contiene al de (P_{max}); es decir, $W \supseteq V$, y

(ii) sobre el conjunto factible de (P_{max}), la función objetivo de (RP_{max}) domina (es mejor que) la de (P_{max}); por ejemplo, $\forall x \in V, g(x) \geq f(x)$.

Se puede ver que $v(RP_{max}) \geq v(P_{max})$, visto de otra manera, (RP_{max}) es una versión *optimista* de (P_{max}). Lo que quiere decir que tiene más soluciones factibles que (P_{max}), y para las soluciones factibles de (P_{max}), su función objetivo es mejor que (más grande que) la de (P_{max}); es decir, tiene un máximo más grande. Se debe recordar que $\max\{f(x) \mid x \in V\} = -\min\{-f(x \mid x \in V)\}$; por lo que, en los restantes párrafos se hablará del problema de minización.

Un comentario interesante que realiza Guinard (2003) es que las relajaciones generan cotas para el valor óptimo de problemas difíciles (en el caso de problemas de maximización, dan una cota superior), y que las soluciones a dichos problemas relajados, aunque infactibles para el problema original, se pueden utilizar como un punto de partida para heurísticos especializados.

2.3 Relajación Lagrangeana

En Guinard (2003) se realiza una amplia explicación sobre relajación Lagrangeana.

Con base en el trabajo de Held y Karp (1970 y 1971), Guinard (2003) presenta la relajación Lagrangeana (LR por sus siglas en inglés) de la siguiente manera: Sin pérdida de generalidad, se asume que (*P*) está expresado en la forma siguiente:

$$\min_{x}\left\{ f(x) \mid Ax \le b, Cx \le d, x \in X \right\},$$

donde *X* contiene restricciones de signo en *x*, y las restricciones de integridad; por ejemplo, $X = \Re^{n-p} \times \Re^{p}$, $X = \Re_{+}^{n-p} \times \Re_{+}^{p}$ o $X = \Re_{+}^{n-p} \times \{0,1\}^{p}$. Sea *I*(*X*) el conjunto de los *p* índices de *x* restringida a ser enteros (o binarios). Las restricciones $Ax \le b$ se asumen complicadas, es decir, que sin ellas el problema (*P*) sería mucho más simple de resolver. Las restricciones $Cx \le d$ (posiblemente un conjunto vacío) se mantendrán en el problema, junto con *X*, la forma de la *relajación Lagrangeana* de (*P*) es la siguiente.

Sea λ el vector no negativo de pesos, llamados *multiplicadores Lagrangeanos*.

Definición 2: La relajación Lagrangeana de (*P*) relacionada con las restricciones complicadas $Ax \le b$, con los multiplicadores Lagrangeanos no negativos λ, es el problema (LR_{λ})

$$\min_x \{ f(x) + \lambda(Ax - b) \mid Cx \leq d, x \in X \}.$$

En (LR_λ), las holguras de las restricciones complicadas $Ax \leq b$ han sido agregadas a la función objetivo con los pesos λ y las restricciones $Ax \leq b$ han sido omitidas, o *dualizadas*. (LR_λ) es una relajación de (P), puesto que

(i) $FS(LR_\lambda)$ contiene $FS(P)$,

(ii) para cualquier x factible para (P), y cualquier $\lambda \geq 0$, $f(x) + \lambda(Ax - b)$ es menor o igual a $f(x)$ (mejor, dado que estamos minimizando).

Por lo que, $v(LR_\lambda) \leq v(P)$, para toda $\lambda \geq 0$; por ejemplo, el valor óptimo $v(LR_\lambda)$, que depende de λ, es una cota inferior para el valor óptimo de (P).

Definición 3: El problema de encontrar la cota inferior Lagrangeana más ajustada en $v(P)$ es:

(LR) $$\max_{\lambda \geq 0} v(LR_\lambda),$$

y es llamado el dual Lagrangeano de (P) relacionado con las restricciones complicadas $Ax \leq b$.

(LR) es un problema en el espacio dual de los multiplicadores Lagrangeanos, mientras que (LR_λ) es un problema en x.

A partir de ahora, se utilizará $v(LR)$ para referirse a la cota de la relajación Lagrangeana o cota Lagrangeana.

2.3.1 Solución Lagrangeana Factible

Sea $x(\lambda)$ una solución óptima de (LR_λ) para algún $\lambda \geq 0$, mejor conocida como solución Lagrangeana. Aunque dicha solución sea factible para el problema original, en la mayoría de los casos, comenta Guinard (2003), éste no es el óptimo del mismo. Lo que sí es cierto, es que el valor óptimo de (P), $v(P)$, se encuentra entre $f(x(\lambda)) + \lambda[Ax(\lambda) - b]$ (Cota inferior) y $f(x(\lambda))$ (Cota superior), puesto que $f(x(\lambda))$ es el valor de una solución factible de (P). Si la holgura complementaria se satisface; por ejemplo, si $\lambda[Ax(\lambda) - b] = 0$, entonces $f(x(\lambda)) + \lambda[Ax(\lambda) - b] = v(P) = f(x(\lambda))$, y $x(\lambda)$ es la solución óptima para (P).

Teorema 1.

1. *Si* $x(\lambda)$ *es una solución óptima de* (LR_λ) *para algún* $\lambda \geq 0$*, entonces* $f(x(\lambda)) + \lambda[Ax(\lambda) - b] \leq v(P)$.
2. *Si, además,* $x(\lambda)$ *es factible para* (P)*, entonces* $f(x(\lambda)) + \lambda[Ax(\lambda) - b] \leq v(P) \leq f(x(\lambda))$.
3. *Si, además,* $\lambda[Ax(\lambda) - b] = 0$*, entonces* $x(\lambda)$ *es una solución óptima de* (P)*, y* $v(P) = f(x(\lambda))$.

2.3.2 Interpretación Geométrica

Monique Guinard (2003) presenta el teorema de Geoffrion (1974) en su artículo, el cual da una interpretación geométrica del problema dual Lagrageano en el espacio de x.

Teorema 2. *El dual Lagrangeano* (LR) *es equivalente a la relajación primal* (PR)

$$\min_{x}\{f(x) \mid Ax \le b, x \in Co\{x \in X \mid Cx \le d\}\},$$

en el sentido de que $v(LR) = v(PR)$.

Cabe agregar que lo anterior está basado en la teoría de dualidad de programación lineal (LP para abreviar) y en las propiedades de las soluciones óptimas de un problema lineal para poliedros racionales. La Figura 2.1 ilustra la interpretación geométrica de la relajación Lagrangeana.

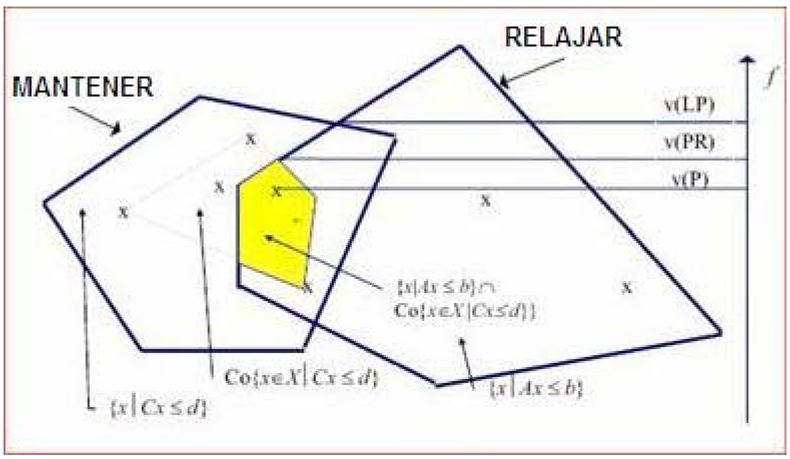

Figura 2.1. Interpretación Geométrica de la Relajación Lagrangeana.

Definición 4: Se puede decir que (LR) tiene la *Propiedad de Integridad* si $Co\{x \in X \mid Cx \le d\} = \{x \mid Cx \le d\}$.

Si (LR) tiene la Propiedad de Integridad (IP para abreviar), entonces los puntos extremos de $\{x \mid Cx \le d\}$ están en X. La consecuencia no tan agradable de dicha propiedad, agrega Guinard (2003), es que en tal escenario LR puede no producir una cota más ajustada que la cota LP. De cualquier forma, algunas veces la relajación LP no puede ser obtenida fácilmente, por lo que una cota LR es útil.

Aunado a lo anterior se debe recordar que cualquier cota de relajación Lagrangeana es siempre al menos tan buena como la cota LP, nunca es peor (Guinard, 2003).

Corolario 1: *Si* $Co\{x \in X \mid Cx \leq d\} = \{x \mid Cx \leq d\}$, *entonces* $v(LP) = v(PR) = v(LR) \leq v(P)$.

Aquí la cota de la relajación Lagrangeana es igual (no puede ser mejor) a la cota LP.

Corolario 2: *Si* $Co\{x \in X \mid Cx \leq d\} \subset \{x \mid Cx \leq d\}$, *entonces* $v(LP) \leq v(PR) = v(LR) \leq v(P)$, *y puede pasar que la cota de la relajación Lagrangeana sea estrictamente mejor que la cota LP.*

Los dos corolarios anteriores quieren decir que a menos que (*LR*) carezca de la Propiedad de Integridad, ésta no producirá una cota más fuerte que la de la relajación lineal LP.

2.3.3 Características de la Función Lagrangeana

Guinard (2003) presenta lo siguiente. La función Lagrangeana $z(\lambda) = v(LR_\lambda)$ es una función implícita de λ. Suponer que el conjunto $Co\{x \in X \mid Cx \leq d\}$ es un polítopo, entonces existe una familia finita $\{x^1, x^2, ..., x^K\}$ de puntos extremos de $Co\{x \in X \mid Cx \leq d\}$; por ejemplo, los puntos de $\{x \in X \mid Cx \leq d\}$, de modo que $Co\{x \in X \mid Cx \leq d\} = Co\{x^1, x^2, ..., x^K\}$. Por consiguiente

$$\min_x \{f(x) + \lambda(Ax - b) \mid Cx \leq d, x \in X\} = \min_{k=1,...,K} \{f(x)^k + \lambda(Ax^k - b)\},$$

y $z(\lambda)$ es la *envoltura menor* de una familia de funciones lineales de λ, $f(x)^k + \lambda\left(Ax^k - b\right), k = 1,\ldots,K$ y así es una función *cóncava* de λ, con puntos críticos donde no es diferenciable; por ejemplo, donde la solución óptima de (LR_λ) no es única.

2.4 Optimización Subgradiente

Para resolver el dual Lagrangeano se utiliza la optimización subgradiente. Boyd, Xiao y Mutapic (2003) coinciden en que el método subgradiente es un algoritmo simple para minimizar funciones convexas no diferenciables. Y agregan que a diferencia del método gradiente ordinario para funciones diferenciables, el método subgradiente usa longitudes de paso que son fijas en el tiempo, no es un método de descenso y la función objetivo puede (y lo hace frecuentemente) incrementarse (Boyd, Xiao y Mutapic, 2003). Además, es mucho más lento que el método de Newton, pero mucho más simple y puede ser aplicado a una gran variedad de problemas. Combinando el método subgradiente con técnicas de descomposición primal o dual, es posible algunas veces desarrollar un algoritmo simple para un problema (Boyd, Xiao y Mutapic, 2003). El método subgradiente fue desarrollado en los años 70's por N. Z. Shor en la Unión Soviética.

2.5 Heurística Primal

La solución obtenida de la relajación Lagrangeana generalmente es infactible. Por esta razón, aplicando heurísticas primales se puede obtener una cota inferior para la solución del problema original. La heurística que se utilizó en este proyecto se presentará en el Capítulo 4.