CAPÍTULO III

ESTADO DEL ARTE

En este capítulo se comentan los trabajos publicados por diversos autores que han realizado estudios sobre el Problema de Localización de Máxima Cobertura Capacitado. Ninguno lo resuelve de modo exacto, pero sí exponen formulaciones y métodos de solución que arrojan resultados muy positivos.

4.1 Ali Haghani

Ali Haghani (1995) ha publicado un artículo donde escribe sobre el Problema de Localización de Máxima Cobertura Capacitado pero permitiendo asignación múltiple. Es decir, debido a que las variables de asignación son continuas, la demanda de los clientes puede ser servida por varias instalaciones. En su artículo propone dos formulaciones del problema y dos métodos de solución.

Haghani (1995) menciona que la cobertura de la demanda es el objetivo principal en la localización de instalaciones de servicio público, tales como estaciones de bomberos, cruz roja, etc. Se dice que las demandas están cubiertas por una instalación, si las distancias (o tiempos) entre la instalación y la ubicación de clientes en un área son menores o iguales que la distancia (o tiempo) de cobertura. Además, siempre se debe recordar que la mayoría de las instalaciones de servicio, tienen capacidad limitada. Esta es una de las razones por las que el modelo de Localización de Máxima Cobertura Capacitado es analizado en este proyecto de tesis, dada su cercanía con muchas situaciones reales.

El uso de técnicas estándar de Branch and Bound es recomendado por Ali Haghani (1995) en caso de la relajación lineal no resulte en soluciones enteras.

La formulación que Ali Haghani (1995) presenta del CMCLP tiene una extensión que incluye la asignación de demandas que no están cubiertas por las instalaciones localizadas y la consideración de niveles mínimos de utilización. Sin embargo, esta extensión lo hace difícil de resolver, según el autor. Los métodos de solución que describe son: un proceso heurístico basado en una técnica "*greedy*" de adición, y un heurístico basado en la relajación Lagrangeana.

Para explicar sus formulaciones, Ali Haghani (1995) presenta la siguiente notación. Sea:

$X_{ij} =$ Demanda en el nodo j que es asignada a una instalación en el nodo i,

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se abre una planta en el nodo } i, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$J =$ Conjunto de puntos de demanda,

$I_j =$ Conjunto de ubicaciones i que pueden cubrir el nodo j,

$\{i \mid d_{ij} \leq \delta\}$,

$\bar{I}_j =$ Conjunto de ubicaciones i que no pueden cubrir el nodo j,

$\{i \mid d_{ij} > \delta\}$,

$I =$ Conjunto de ubicaciones potenciales,

$= I \cup \bar{I}_j$

$W =$ El peso asociado con la demanda cubierta,

$L_i =$ Nivel mínimo de utilización (capacidad) de una instalación en el nodo i,

$U_i =$ Nivel máximo de utilización (capacidad) de una instalación en el nodo i,

4.1.1 Primer Formulación de Haghani

Como se mencionó con anterioridad, Haghani (1995) permite en su modelo la atención de la demanda de los clientes desde varias instalaciones.

$$Max \sum_{i \in I_j} \sum_{j \in J} X_{ij} \tag{12}$$

Sujeto a

$$-L_i Y_i + \sum_{j \in J} X_{ij} \geq 0 \qquad \forall i \in I \tag{13}$$

$$U_i Y_i - \sum_{j \in J} X_{ij} \geq 0 \qquad \forall i \in I \tag{14}$$

$$\sum_{i \in I} Y_i \leq p \tag{15}$$

$$\sum_{i \in I} X_{ij} \leq h_j \qquad \forall j \in J \tag{16}$$

$$Y_i = \{0,1\} \qquad \forall i \in I \tag{17}$$

$$X_{ij} \geq 0 \qquad \forall i \in I, \forall j \in J \tag{18}$$

La función objetivo (12) maximiza el total de la demanda cubierta. El conjunto de restricciones (13) se refiere al nivel mínimo de utilización de las instalaciones; es decir, si una instalación es localizada en el nodo $i \in I$, entonces la demanda asignada a ella debe ser al menos L_i. El conjunto (14) son restricciones de cobertura y máxima capacidad; es decir, no se puede asignar demanda al nodo $i \in I$ a menos que se seleccione una instalación para ese nodo, la demanda asignada no puede exceder U_i. La restricción (15) prohíbe que se abran más de p instalaciones. Las restricciones en (16) aseguran que el total de la demanda de un punto $j \in J$ asignada a todos los puntos $i \in I$ no exceda la demanda del punto $j \in J$. Los conjuntos (17) y (18) son restricciones de integridad y no negatividad respectivamente. El modelo anterior, no busca asignar aquella demanda que no está cubierta o que está fuera del radio de cobertura de cualquier instalación abierta; que por cierto, podría ser cubierta por aquellas instalaciones con exceso de capacidad si no se tomara en cuenta el criterio de cobertura.

4.1.2 Segunda Formulación de Haghani

Haghani (1995) propone formular un modelo con una función objetivo (19) jerárquica que maximiza la cobertura y minimiza la distancia promedio entre la demanda no cubierta y las instalaciones a las que dichas demandas han sido asignadas. De nueva cuenta, se permite la atención de la demanda de los clientes desde varias instalaciones. El modelo se formula como sigue:

$$Max\ \mathrm{W}\sum_{i\in I_j}\sum_{j\in J} X_{ij} - \sum_{i\in \bar{I}_j}\sum_{j\in J} d_{ij} X_{ij} \tag{19}$$

Sujeto a

$$-L_i Y_i + \sum_{j\in J} X_{ij} \geq 0 \qquad \forall i \in I \tag{20}$$

$$U_i X_i - \sum_{j\in J} X_{ij} \geq 0 \qquad \forall i \in I \tag{21}$$

$$\sum_{i\in I} Y_i \leq p \tag{22}$$

$$\sum_{i\in I} X_{ij} = h_j \qquad \forall j \in J \tag{23}$$

$$Y_i = 0,1 \qquad \forall i \in I \tag{24}$$

$$X_{ij} \geq 0 \qquad \forall i \in I, \forall j \in J \tag{25}$$

Los conjuntos de restricciones (20)-(22) y (24)-(25) funcionan del mismo modo que en el modelo presentado anteriormente. Las restricciones (23) aseguran que todas las demandas en cada nodo $j\in J$ serán colocadas a los sitios candidatos $i\in I$ (estén o no cubiertas). Si la capacidad total de las instalaciones abiertas es menor que el total de la demanda, el problema no puede tener solución factible. De igual modo, se puede asumir, sin pérdida de generalidad, que existe suficiente demanda en la red para garantizar la apertura de al menos una instalación (la demanda total de la red es mayor que el mínimo de los L_i's); si no, el problema no existe (Haghani, 1995).

En general, una elección apropiada de W asegurará que la maximización de la demanda sea el objetivo principal. El valor de W es:

$$W > H(d_{\max} - d_{\min}),$$

donde, $H := \sum_j h_j$ es la demanda total y d_{max} y d_{min} son la distancia máxima y mínima entre cualquier par de nodos $i \in I$ y $j \in J$ en la red.

4.1.3 Métodos de Solución

<u>"*Greedy*" de Adición</u>

Haghani (1995) propone este algoritmo que, en cada iteración, abre una instalación. Después de localizar cada instalación, el conjunto de ubicaciones candidato y de asignación de demandas a dichas instalaciones es actualizado.

Paso 0. Inicialización

Fijar $\ell := 0$, $Y_i^* := 0 \;\; \forall i$, $X_{ij}^* := 0 \;\; \forall i, j$, $\bar{h}_j := h_j \;\; \forall j$,

$$M := \left\{ i \mid Y_i^* = 0, \sum_{j \in A_i} \bar{h}_j \geq L_i \right\} \text{ y } A_i := \{ j \mid d_{ij} \leq \delta \}.$$

Paso 1. Localización de instalación

Para cada $i \in M$ calcular $C_i := Min\left\{ \sum_{j \in A_i} \bar{h}_j, U_i \right\}$. Para la instalación i', con el valor más alto C_i, hacer $Y_{i'}^* := 1$. Hacer $\ell := \ell + 1$ e ir al paso 2.

Paso 2. Asignación de demanda

Después de localizar ℓ instalaciones, reasignar las demandas a estas instalaciones resolviendo el problema de programación lineal siguiente.

$$Max \sum_{i \in I_j} \sum_{j \in J} X_{ij} \tag{26}$$

Sujeto a

$$-L_i Y_i^* + \sum_{j \in J} X_{ij} \geq 0 \qquad \forall i \in I \tag{27}$$

$$U_i Y_i^* - \sum_{j \in J} X_{ij} \geq 0 \qquad \forall i \in I \tag{28}$$

$$\sum_{i \in I} X_{ij} \leq h_j \qquad \forall j \in J \tag{29}$$

$$X_{ij} \geq 0 \qquad \forall i \in I, \forall j \in J \tag{30}$$

Donde la función objetivo (26) maximiza la demanda cubierta. Las restricciones en (29) son de desigualdad para permitir que las plantas a las que ha sido asignado el cliente $j \in J$ puedan satisfacer menos demanda que la demanda total del cliente en específico. Los conjuntos de restricciones (27), (28) y (30) funcionan de igual forma que en el modelo descrito anteriormente. La solución del problema de programación lineal provee la asignación de las demandas X_{ij}^* después de localizar ℓ instalaciones. Actualizar la demanda no asignada en cada nodo como sigue y después ir al paso 3.

$$\bar{h}_j := h_j - \sum_{i \in I} X_{ij}$$

Paso 3. Actualización

Si $\ell = P$, ir al paso 4. Si $\ell < P$, actualizar el conjunto de sitios candidatos M como sigue:

$$M := \left\{ i \mid Y_i^* = 0, \sum_{j \in A_i} \bar{h}_j \geq L_i \right\}$$

Si $M = \emptyset$, ir al paso 4. De otro modo, ir al paso 1.

Paso 4. Terminar

Si $\sum_{i \in I} X_{ij} = h_j \quad \forall j \in J$, parar. De otro modo, para todas las instalaciones localizadas (nodo $i \in I$ para cada Y_i^* = 1), calcular la capacidad excedente $U_i' := U_i - \sum_{j \in J} X_{ij}$. Se asume que está implícito que $\sum_{j \in J} h_j \leq \sum_{i \in I} U_i$.

Si no ocurre esto, el paso 4 se puede modificar de la siguiente manera:

Resolver el siguiente problema de programación lineal para asignar la demanda sin cubrir restante a las instalaciones localizadas y luego parar.

$$Min \sum_{i \in \hat{I}} \sum_{j \in J} d_{ij} \hat{X}_{ij} \tag{31}$$

$$\hat{X}_{ij} \quad i \in \hat{I}, j \in J$$

Sujeto a

$$U_i' - \sum_{j \in J} \hat{X}_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in \hat{I} \tag{32}$$

$$\sum_{i \in \hat{I}} \hat{X}_{ij} = \bar{h}_j \qquad \forall i \in \hat{I}, \forall j \in J \tag{33}$$

$$\hat{X}_{ij} \geq 0 \qquad \forall i \in \hat{I}, j \in J \tag{34}$$

Donde $\hat{I}$ es el conjunto de nodos i para los cuales Y_i^* = 1, o una instalación es ubicada en i. La función objetivo (31) minimiza la distancia promedio entre la demanda no cubierta y las instalaciones a las que dichas demandas han sido asignadas. Las restricciones (32) son sobre el uso máximo de capacidad de una instalación $i \in \hat{I}$. Con las restricciones (33) se obliga a atender toda la demanda no cubierta de los clientes. El conjunto de restricciones (34) son de no negatividad. La solución del problema de programación lineal dará como resultado la asignación de la demanda restante no cubierta a las instalaciones localizadas X_{ij}^{*}. La solución final del problema es por lo tanto los valores finales de Y_i^{*}, X_{ij}^{*} y $\hat{X}_{ij}^{*}$.

Relajación Lagrangeana

El segundo proceso de solución que propone Haghani (1995) es un heurístico basado en una relajación Lagrangeana. Para esto, relaja las restricciones de capacidad (20) y (21). Quedando el siguiente modelo relajado:

$$Max \sum_{i \in I_j} \sum_{j \in J} (W + \alpha_i - \beta_i) X_{ij} + \sum_{i \in \bar{I}_j} \sum_{j \in J} (-d_{ij} + \alpha_i - \beta_i) X_{ij} + \sum_{i \in I} (\beta_i U_i - \alpha_i L_i) Y_i \tag{35}$$

Sujeto a

$$\sum_{i \in I} Y_i \le p \tag{36}$$

$$\sum_{i \in I} X_{ij} = h_j \qquad \forall j \in J \tag{37}$$

$$Y_i = 0,1 \qquad \forall i \in I \tag{38}$$

$$X_{ij} \ge 0 \qquad \forall i \in I, \forall j \in J \tag{39}$$

Ali Haghani (1995) propone la solución del problema Lagrangeano para valores fijos α_i y β_i con lo siguiente:

1) Para la variable Y_i:

   a. Encontrar los valores más grandes de p de $(\beta_i U_i - \alpha_i L_i)$.

   b. Fijar los valores de las Y_i a 1, dado por $(\beta_i U_i - \alpha_i L_i) \ge 0$.

   c. Fijas las demás Y_i a 0.

2) Para X_{ij}

   a. Enfocarse en un nodo $j \in J$ de demanda dado.

Encontrar la localización $i_1^* \in I_j$, que maximiza $(W + \alpha_i - \beta_i) \geq i \in I_j$

Encontrar la localización $i_2^* \in \bar{I}_j$, que maximiza $(d_{ij} + \alpha_i - \beta_i) \quad \forall j \in \bar{I}_j$

b. Fijar todos los $X_{ij} = 0$

c. Si $(W + \alpha_i - \beta_i) \geq (d_{ij} + \alpha_i - \beta_i)$

Fijar $X_{i_1^* j} := h_j$

De otro modo $X_{i_2^* j} := h_j$

Finalmente, una solución factible para el problema original puede ser obtenida teniendo los valores Y_i y resolviendo un problema de flujo en redes con el algoritmo "*out-of-kilter*". Por medio de la relajación Lagrangeana se obtiene una cota superior y con la solución del problema de flujo en redes con el algoritmo "*out-of-kilter*" se obtiene una cota inferior. Si ambas son muy cercanas, se puede detener el procedimiento. La actualización de α_i's - β_i's se hace con optimización subgradiente.

4.2 Hasan Pirkul y David Schilling

Pirkul y Shilling (1991) proponen, en su artículo, una extensión del modelo original del Problema de Localización de Máxima Cobertura Capacitado que corrige el modelo evitando que se dejen puntos de demanda sin asignar. En este modelo también se busca asignar la demanda que no está cubierta; pero a diferencia del modelo de Haghani (1995), aquí no se permite la asignación múltiple de clientes, toda la demanda de un cliente tiene que ser atendida por la misma instalación. La formulación del problema está basada en la estructura del problema de *p*-Median Capacitado:

$$Max\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}c_{ij}h_j x_{ij} \tag{40}$$

Sujeto a

$$\sum_{i\in I} y_i \leq p \tag{41}$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = 1 \qquad \forall j \in J \tag{42}$$

$$x_{ij} \leq y_i \qquad \forall i \in I, j \in J \tag{43}$$

$$\sum_{j\in J} c_{ij}h_j x_{ij} \leq b_i \qquad \forall i \in I \tag{44}$$

$$y_i = \{0,1\} \qquad \forall i \in I \tag{45}$$

$$x_{ij} = \{0,1\} \qquad \forall i \in I, j \in J \tag{46}$$

donde,
J es el conjunto de todos los puntos de demanda,

I es el conjunto de ubicaciones potenciales,

h_j es la demanda del punto j,

b_i es la capacidad de una instalación en el sitio i,

p es el número de instalaciones a ser abiertos,

δ es la distancia o tiempo máximo de servicio,

d_{ij} es la distancia que hay del nodo i al nodo j,

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & d_{ij} \leq S \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la demanda en el punto } j \text{ es servida por la planta en el punto } i \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si la planta es abierta en } i \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La función objetivo (40) maximiza la demanda cubierta de los clientes que estén dentro del área de cobertura de las instalaciones abiertas. La restricción (41) evita que se localicen más de p instalaciones. El conjunto de restricciones (42) son de asignación, un cliente no se puede asignar a más de una planta y además tiene que estar forzosamente asignado. Las restricciones del conjunto (43) se refieren a que un cliente $j\in J$ no puede ser asignado a una instalación en el nodo $i \in I$, a menos que la instalación esté abierta. El conjunto de restricciones (44) son las referentes a que la demanda total asignada a una instalación en el nodo $i \in I$ no puede exceder la capacidad de la misma.

Ellos afirman que el modelo simple del CMCLP es útil en ciertos contextos, pero no es una representación efectiva de sistemas donde el servicio debe ser proporcionado forzosamente a todos los puntos de demanda; es decir, en casos donde no se pueden permitir clientes sin ser cubiertos, por ejemplo, servicios de emergencia como cruz roja o bomberos. Esto debido a que en el modelo simple no es obligatorio que todos los clientes estén asignados. Por lo que Pirkul y Shilling (1991) presentan una formulación alternativa donde quitan la variable c_{ij} de las restricciones de capacidad dejándolas como sigue:

$$\sum_{j \in J} h_j x_{ij} \leq b_i \qquad \forall i \in I \tag{47}$$

Toda la demanda puede ser asignada a una instalación y contribuir a disminuir su capacidad, sin importar si la demanda está dentro de la distancia de servicio δ o no (Pirkul y Schilling, 1991). Sin embargo, y aunque esta medida asegura el servicio a los clientes no cubiertos, la calidad del mismo no es segura.

Entonces, lo que proponen los autores, es resolver el modelo original y luego tratar de asignar a los clientes que no estén cubiertos con base en la proximidad con las instalaciones, esto busca aumentar el nivel de servicio. Para ello, reformulan la función objetivo, quedando como sigue:

$$\text{Max} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} v_{ij} h_j x_{ij} \text{ ,} \tag{48}$$

donde,

$$v_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si } d_{ij} \le \delta \\ \alpha\left[1 - \dfrac{\left(d_{ij} - \delta\right)}{\left(\max\limits_{ij} d_{ij} - \delta\right)}\right] & \text{Si } d_{ij} > \delta \end{cases}$$

con $\alpha > 0$. Con lo anterior, se busca mejorar la función objetivo cuando la demanda que no está cubierta por alguna instalación, es asignada a alguna instalación cercana. Con esta formulación buscan acercar el modelo a situaciones reales, sobre todo en casos de servicios de emergencia, donde no se pueden permitir clientes sin cobertura de un servicio, aún y cuando estén fuera del radio de cobertura.

El método de solución que plantean Pirkul y Schilling (1991) y que tratará de cubrir la mayor demanda posible, asignando incluso aquellos clientes que después de abrir las instalaciones no estén dentro del radio de cobertura de ninguna de las instalaciones abiertas, está basado en el uso de la relajación Lagrangeana. Para lo que definen, sea (LR_λ):

$$Z_L = \text{Max} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} v_{ij} h_j x_{ij} - \sum_{j \in J} \lambda_j \left(\sum_{i \in I} x_{ij} - 1 \right) \tag{49}$$

Sujeto a

$$\sum_{i \in I} y_i \le p \tag{50}$$

$$x_{ij} \le y_i \qquad \forall i \in I, j \in J \tag{51}$$

$$\sum_{j \in J} h_j x_{ij} \le b_i \qquad \forall i \in I \tag{52}$$

$$y_i = \{0,1\} \qquad \forall i \in I \tag{53}$$

$$x_{ij} = \{0,1\} \qquad \forall i \in I, j \in J \tag{54}$$

Con la función objetivo (49) que maximiza la demanda cubierta y contiene las restricciones de asignación con su violación penalizada. Los conjuntos de restricciones (50) – (54) funcionan de la misma manera que en el modelo descrito anteriormente. Después, Pirkul y Schilling (1991) ignoran el conjunto de restricciones $\sum_{i \in I} y_i \leq p$ y reformular el problema como el conjunto de problemas siguiente:

Para $i = 1, 2, \ldots, |I|$,

$$\text{Max} \sum_{j \in J} \left(v_{ij} h_j - \lambda_j\right) x_{ij} \tag{55}$$

Sujeto a

$$x_{ij} \leq y_i \qquad \forall\, i \in I, j \in J \tag{56}$$

$$\sum_{j \in J} h_j x_{ij} \leq b_i \quad \forall i \in I \tag{57}$$

$$x_{ij} \in \{1,0\} \quad \forall\, i \in I, j \in J \tag{58}$$

$$y_i \in \{1,0\} \quad \forall i \in I \tag{59}$$

La función objetivo (55) es la misma que la función objetivo (49) pero está simplificada. Los conjuntos de restricciones (56) – (59) función de la misma forma en que se describe en el modelo anterior. Para esto aclaran que, en cada sub-problema la variable de localización y_i es igual a 0 o 1. Si es igual a 0, todas las variables x_{ij} son iguales a 0 y su contribución a la función es 0. Si y_i es igual a 1, entonces el sub-problema es un problema de la mochila. Después, mencionan que relajarán cada sub-problema a la versión continua del problema de la mochila. El conjunto de restricciones $\sum_{i \in I} y_i \leq p$ mantiene el nexo entre todos los sub-problemas (Pirkul y Schilling, 1991).

En primer lugar, resuelven los n sub-problemas de la mochila (uno para cada instalación candidato del problema original) y ordenan los valores de las soluciones de los mismos de manera decreciente, la solución para (LR_λ) se obtiene sumando los p mejores valores de las soluciones (cuando estos sean positivos) de los problemas de la mochila y a las variables y_i correspondientes a esos p se les asigna el valor de 1, esto en cada iteración de la optimización subgradiente. Finalmente, la cota superior se obtiene resolviendo el dual Lagrangeano.

Posteriormente, en cada iteración de la optimización subgradiente, utilizan un heurístico para encontrar soluciones factibles, para el problema original, a partir de la solución de la relajación Lagrangeana. El heurístico que utilizan Pirkul y Schilling (1991) en su artículo es el siguiente:

1. Seleccionar las "mejores" p instalaciones correspondientes a aquellos p sub-problemas de la mochila que tienen la función objetivo más grande (obtenida del problema de la mochila en su versión continua). Sea D el conjunto que contiene las p instalaciones seleccionadas (abiertas).
2. Verificar si la capacidad total de las instalaciones abiertas es adecuada para cubrir la demanda total de todos los clientes. Si es así, ir al Paso 3. De otro modo, detenerse, no será posible encontrar una solución factible (en donde todos los clientes estén asignados) en esta iteración del proceso de optimización subgradiente.
3. Para cada nodo $j \in J$, determinar el número de instalaciones en D que cubren ese nodo $j \in J$. Sea D_k el conjunto de nodos que están cubiertos por k instalaciones.
4. Para cada nodo en el conjunto D_1, asignar el nodo a la instalación más cercana que tenga capacidad suficiente para servirlo. Después de cada asignación, se reduce la capacidad disponible de la instalación asociada con la demanda del nodo asignado.

5. Repetir el paso 4 para cada conjunto D_k, con k incrementándose desde 2 hasta p.
6. Para cada nodo $j \in J$ en el conjunto D_0, asignar el nodo a la instalación $i \in I$ abierta con el mayor valor v_{ij} (si dicho valor es cero, asignar el nodo a la instalación más cercana usando d_{ij}) que a su vez tenga suficiente capacidad para atender al nodo $j \in J$. Con cada asignación, reducir la capacidad de la instalación $i \in I$ a la que se asignó el nodo $j \in J$, restándole la demanda asociada al nodo $j \in J$ asignado.
7. Si cada nodo está asignado a alguna instalación, una solución factible ha sido encontrada; de otro modo, terminar, no se puede encontrar una solución factible en esta iteración de la optimización subgradiente.